建筑结构力学

〔日〕和泉正哲 著
薛松涛 陈 镕 译
王远功 校

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

责任编辑：杨鸿森　赵丽平
封面设计：阎　亮
版式设计：程文卫



ISBN 7-5605-1631-9
9 787560 516318 >

ISBN 7-5605-1631-9/TU·22　定价：28.00 元

建筑结构力学

〔日〕和泉正哲　著

薛松涛　陈镕　译

王远功 校

西安交通大学出版社

Xian Jiaotong University Press

内容简介

本书是以工科大学本科生为对象的工程力学教科书，其内容包括了材料力学、结构力学、弹性与塑性力学、能量法及有限元法、振动理论及地震响应分析、建筑结构的设计等。每部分内容均设有不同级别的例题，以加深不同读者对教材内容的理解。每章后面均附有大量的习题，书末还附有全部习题解答。

本书也可作为土木工程、结构工程及建筑等相关专业的研究生及工程技术人员的参考书。

This Chinese edition has been translated from the original Japanese publication，建築構造力学 1 published by Baifukan Co. ，Ltd. (Japan)，1984，Copyright ©Masanori Izumi.

图书在版编目(CIP)数据

建筑结构力学 /（日）和泉正哲著；薛松涛，陈镕译.
—西安：西安交通大学出版社，2003.11
ISBN 7-5605-1631-9

Ⅰ.建… Ⅱ.①和… ②薛… ③陈… Ⅲ.建筑结构-结构力学-高等学校-教材 Ⅳ.TU311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 096828 号

陕版出图字：25-2003-086 号

书　　名　建筑结构力学
著　　者　〔日〕和泉正哲
译 校 者　薛松涛　陈镕　王远功
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路 25 号（邮编：710049）
电　　话　(029)2668357，2667874(发行部)
　　(029)2668315，2669096(总编办)
印　　刷　西安建筑科技大学印刷厂
字　　数　398 千字
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　16.625
版　　次　2003 年 11 月第 1 版　2003 年 11 月第 1 次印刷
印　　数　000 1～3 000
书　　号　ISBN 7-5605-1631-9/TU·22
定　　价　28.00 元

版权所有　侵权必究

译者的话

由日本著名的结构工程、地震工程专家和泉正哲教授编著的《建筑结构力学》，是一本内容非常丰富的书。我第一次读到此书，是1986年刚去日本留学的时候，当时上册出版到第3版。后来，在1988年的时候，我也有幸参加了该书下册的编写工作。

当时，我就有一个想法，在中国翻译出版此书，因为编写此书的主导思想让我耳目一新。该书有以下几个特点：

1. 由浅入深，覆盖的知识面广，同时重点突出。我曾在同济大学的二年级学生中征求过意见，学生们认为这本书很适合他们。而我在同济大学的硕士生及博士生也觉得此书是一本很有价值的参考书。

2. 通俗易懂。这主要表现在讲述新的概念及理论时大量采用了卡通图画。为了做成这些卡通图画，和泉正哲教授花了大量心血，使该书概念清晰、可读性强。

3. 与规范紧密结合。每一章都紧扣日本建筑规范，学习效果立竿见影。但是，为了保持原书的完整性，译者没有将该规范转换成中国规范。

至今，此书在不断修订的基础上已经出版到了第10版，这在日本的大学教材中也是罕见的。因此，我们加紧了此书的翻译，以便于大学中、高年级学生及研究生学习、参考。

在翻译过程中，得到了同济大学蒋通教授，日本京都大学防灾研究所博士后谢强、博士研究生周锋，日本东北大学博士研究生陈军、秦岭，同济大学博士唐和生、范存新，同济大学硕士研究生谢丽宇、郑海涛、钱宇音、万春风、陈诗慧等人的大力协助，在此深表感谢。

同济大学　薛松涛

中文版前言

非常高兴《建筑结构力学》上卷将由西安交通大学出版社出版，这对大家、同时对我来讲都是一件非常有意义的事。

所谓力学，是将物体的运动以及变形等的现象，用数学方程这种人类的知识宝库里最抽象的形式来表现的一个科学体系。同时，该体系也可用来预测物体运行、结构建造等的行为，并在实用上已完全融入了人们的生活。换言之，我们日日夜夜在体验力学。

但是，为什么学生们都不喜欢力学以及作为其应用分支的结构力学的学习呢？其原因在于：正确的同时又易懂的教材不多。

完成了力学体系研究的牛顿，估计是，一面在一个平展的桌子上滚动一个小球，一面考虑了以下的事："用力推动一个球，球会滚动。所用的力越大，球上面受到的力也越大，结果球滚动的速度也加快了。因此，可以认为力 F 和速度 v 成正比，也就是说 $F=mv$。但是，在继续观察中发现，一旦对已经运动的球去掉施加的作用力，球仍然将继续滚动。所以，$F=0$ 也不能说明 $v=0$。即使去掉施加在球上的力，看上去球仍以同样的速度滚动，也就是说把力作为改变速度的原因来考虑比较好。我们一开始时可以假定力 F 是和速度的变化 a 成正比的，即 $F=ma$。"

他的思考方法，即在短时间内的速度的变化也就是所谓的加速度 a 是一种什么样东西的想法，直接与数学的微分、积分等的领域的开拓相关联。桌子上的球的运动，不加力的话最终会停下来。要预测在什么地方停下来，只有 $F=ma$ 的简单的方程式是不够的，必须要有正确表示球以及桌子的状态的边界条件。有时候，还有必要考虑空气的状态。

力学和结构力学，用于表示实际现象的话，有时会变得比较复杂，然而，在当今时代，计算机会帮助我们进行复杂的计算。美国的最初的计算机的应用是弹道的计算，也就是 $F=ma$ 的基本方程之上加上边界条件。简而言之，用方程能很好地表现出力学的特点。

力学以及其应用的结构力学，从根本上讲是非常简单和明了的，但是，当它被转化为实际应用的方程式时，给人的印象是很难的一门科学。

在本书中，比较难懂的部分，加上了图解进行详尽的解释。第一卷中，在结构力学的较普遍的基础部分上，增加了计算机应用部分，成了最先进的结构力学的书。而难度较深的第二卷，同样用了大量的图解来表示，以便于理解和学习。相信一、二两卷读破以后，对现在的结构力学的专门家来讲，也将进入具有相当水平的层次了。

我非常希望读本书的各位能够理解书的本质之处，同时，在实际应用上也能得到一些帮助。由于本书易于理解，同时内容也比较前沿，因而，在此对劝告我出版中文版、同时也是本书翻译的同济大学薛松涛教授和陈镕教授表示衷心的感谢。同时，向能帮助我实现本书出版的西安交通大学出版社国际合作部主任、编审赵丽萍女士表示深切敬意。

和泉正哲

2003 年 7 月

前　言

无论在国内还是国外，均已出版了大量关于结构力学的名著，我写本书则是基于以下的目的：

1. 人们在日常生活中使用工具或制造物品时经常接触到结构力学，故它应是容易理解的学问，但一般人却认为这是一门难于理解的学问。本书则力图消除这样的误解。

2. 仅靠在大专、大学及研究生院所学范围的结构力学是不能满足实际应用需要的。因此，不仅是正在学校学习的学生、就是已作为专家而活跃在社会上的人也需要在宝贵而有限的时间内正确地掌握结构力学的本质及其广泛应用的要点，并使之变为自己的东西，因为不这样做就赶不上该领域的飞速发展。

3. 随着计算机的发展，建筑、土木等与建设行业有关的工程师们正不断地从简单的计算和制图中解放出来。这一事实反过来对工程师提出了新的要求，即应能胜任高度知识化的工作：理解工程问题的实质，掌握并熟练地使用计算机，能将自己需要的情报从计算机中提取出来。与熟悉计算方法相比，更重要的是必须理解“物体的力学行为”，即理解结构力学。

4. 结构设计正从“满足法规和规范要求”这一传统方法向“由设计者负责进行判断”的方向过渡。例如，设计者必须掌握结构在地震时的行为是怎样的(动力问题)；能在多大的外力作用下保持不破坏(推断承载能力)等问题。

因此，在本书中力求：(1)多使用图形以对结构力学作出明确的说明；(2)编排方式便于了解结构力学的发展过程及将来发展的前景；(3)将范围从过去的静弹性分析发展到动力问题和承载力问题；(4)舍去冗长且不必要的部分以节省读者宝贵的时间。在各章中还严格挑选出少量的例题并将之分类为A级、B级、C级。为了理解本书，对A级例题一定请读者自己求解。若读者对B级例题能自己求解，则说明读者对结构力学的理解是很优秀的。即使不会求解B级例题，通过阅读解题答案也可提高读者的应用能力。A级、B级例题是与本书的正文同等重要的。C级例题包括了相当难的问题，若不会求解完全可以轻松地参考解题答案。此外在各章末也按A级、B级、C级列出了练习题，在

书末给出了答案供自习参考，这是为了给对结构力学有兴趣的人提供进一步提高自己能力的材料（若能对各章末的练习题过一下目，则有助于充分理解结构力学）。

本书的构成如下：第一卷中学习的对象是：包括了过去教科书的内容，即学习处于静止状态（结构处于有变形但无急剧运动的状态）的弹性（没有永久变形）结构，由如柱、梁那样的线状构件——杆结构——所组成的刚架结构力学。其中还要学习结构力学中的主要用语、概念和建模方法。

第二卷中，为了求解板、墙、曲面屋顶等的面结构以及基础等块状的立体结构的需要，首先学习弹性理论基础，然后学习杆结构、面结构和立体结构共同的理论体系——能量原理。正是由于基于能量原理的近似解法的发展，才可能使现代的、利用计算机进行复杂结构的分析成为可能，进而还要学习在产生了永久变形后的塑性领域中的结构力学，此时的结构已突破了弹性的框框。同时还需理解振动分析的方法以理解建筑物在强地震和强风时的行为。最后是学习综合了上述内容而得出的建筑结构的设计理论和方法。以上是第二卷结构力学的内容。

在撰写中考虑到，当将本书作为大专、大学等的教材时，按每周 2 小时课程则各卷均需 6 个月到 1 年的学习时间。各卷若按 6 个月完成时，各章末的练习题是留给听课者课外自习用的，并且在卷末附有答案。如果读者是正在从事实际工作的人员，则可以按自己的需要挑选有兴趣的部分阅读。此时建议以第二卷为中心，必要时则可参照第一卷。

在撰写本书时曾得到多方面的帮助。书中插图的漫画是时为东北大学学生的长女和泉真理所画。其余插图则是东北大学技官佐佐木达夫利用了几乎所有的业余时间描绘的。文章的检查和修正及问题的选择和解答则得助于东北大学副教授三桥博三、助教胜仓裕和野村希晶，他们曾进行了反复的研究和探讨；此外，木村正彦等东北大学建筑结构力学研究室的研究生们也提供了帮助。同时八户工业大学副教授伊藤敬一对本书的总体构成等曾与作者进行了充分的讨论。由于这样多方位的检查和讨论，使校正稿件的修正量大大超过了常规，完成日期也推迟，从而给推荐出版本书的培风馆带来很大麻烦。特别是担任责任编辑的松本和宣先生一定付出了很大的辛劳。

在本书得以出版之际，我要对出版本书的培风馆及列出姓名的各位人士表示感谢，同时也愿本书能为增进读者对作为结构设计基础的结构力学的理解而发挥作用。

和泉正哲

目　录

译者的话
中文版前言
前言

0　材料力学、结构力学的概念 …… (1)
0.1　为什么对结构工程师而言，材料力学、结构力学是必需的 …… (1)
0.2　材料力学与结构力学 …… (1)

1　力学与结构力学的历史 …… (4)
1.1　力与力矩 …… (4)
1.2　功与能量 …… (7)
1.3　力学和结构力学的发展 …… (8)
1.4　微分与积分 …… (13)
1.5　牛顿以后 …… (16)
1.6　力的存在 …… (17)
1.7　向量 …… (19)
1.8　现代结构力学中存在的问题 …… (22)
第 1 章练习题 …… (31)

2　结构设计和结构力学 …… (32)
2.1　结构设计的内容 …… (33)
2.2　作用在结构上的力 …… (36)
2.3　反力与作用在结构上外力的平衡 …… (39)
2.4　结构中产生的变形与内力——结构的模型化 …… (41)
2.5　容许应力与破坏 …… (46)
第 2 章练习题 …… (51)

3　应力与应变 …… (53)
3.1　力的平衡 …… (53)
3.1.1　力的平衡方程式与力向量图 …… (53)

3.1.2 力多边形 …… (56)
3.1.3 坐标系与力的分量表示 …… (58)
3.2 内力 …… (68)
3.3 内力的种类 …… (71)
3.4 坐标系与内力的符号 …… (75)
3.5 应力 …… (78)
3.6 微分、泰勒展开、偏微分 …… (82)
3.7 应变 …… (86)
3.8 应变与应力的关系——本构方程 …… (88)
3.9 单位 …… (89)
第3章练习题 …… (91)

4 杆系结构的结构力学 …… (95)
4.1 静定结构 …… (95)
4.2 平面桁架 …… (99)
4.3 静定梁 …… (112)
4.4 静定刚架 …… (122)
4.5 静定梁、静定刚架内力图作法要点 …… (123)
4.6 梁的基本公式 …… (125)
4.6.1 公式的推导 …… (126)
4.6.2 公式的应用 …… (131)
4.7 莫尔定理与图乘法(弯矩面积法) …… (139)
4.7.1 莫尔定理 …… (139)
4.7.2 图乘法(弯矩面积法) …… (143)
第4章练习题 …… (147)

5 梁基本公式的应用 …… (152)
5.1 转角法 …… (153)
5.1.1 基本公式的推导 …… (153)
5.1.2 荷载项的计算 …… (155)
5.1.3 转角法的应用 …… (157)
5.2 刚臂法 …… (168)
5.2.1 刚臂法的原理与步骤 …… (168)
5.2.2 刚臂法的求解 …… (170)
5.3 矩阵法 …… (183)
5.3.1 矩阵法的基本公式 …… (183)
5.3.2 组建结构的总体刚度矩阵 …… (189)
5.4 转角法、刚臂法、矩阵法的总结 …… (193)
5.5 截面内的应力 …… (193)

5.5.1 剪应力的分布：$\tau = QS/bI$ …… (194)
5.5.2 剪应力流、剪切中心 …… (198)
第 5 章练习题 …… (201)

附录 …… (205)
1 三角函数 …… (205)
2 微分、积分 …… (205)
3 泰勒展开的证明 …… (206)
4 向量 …… (207)
5 矩阵运算 …… (207)
6 行列式 …… (214)
7 克莱姆法 …… (215)
8 平面刚架(静定、超静定)判别式的推导 …… (216)
9 希腊字母 …… (217)

练习题答案 …… (218)
索引 …… (251)
人名索引 …… (254)

0 材料力学、结构力学的概念

第0章的内容：在进入结构力学学习前，首先对为什么要学习材料力学、结构力学[①]，材料力学、结构力学是什么样的学科，作一简单的说明。



0.1 为什么对结构工程师而言，材料力学、结构力学是必需的

建筑物是人类生活的空间，人类生活的变化构成了建筑物不断变迁直至今日的原动力。但建筑物设计的根本思想在古代就已确立了。例如罗马的维特鲁维亚(Vitruvius)(生于公元前60年)在其著作中列举了建筑设计的目标是坚固、功能、经济及美观，这样的考虑方法至今没有改变[②]。材料力学、结构力学是在考虑经济性的同时实现保持建筑物坚固目的而形成的基础且实用的学科，不了解结构力学便不可能进行建筑物的设计。因此，现在我国大多数的大学、大专的建筑学科均将材料力学、结构力学作为必修课。实际上，在结构上合理的建筑物是美丽的(图0.1)。



0.2 材料力学与结构力学

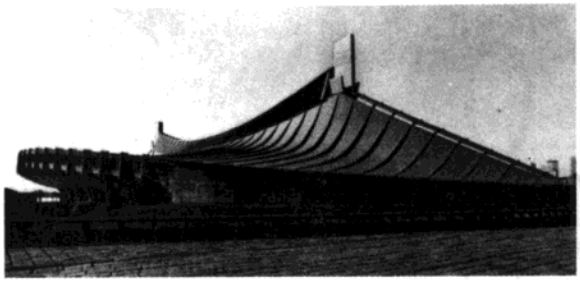
为了研究物体在受力时是如何变形、最终如何破坏的，有着种种的观点和考虑方法。既有基于微观立场(固体物理或物性论立场)，即根据构成物体的材料分子或结晶排列的变化和考虑分子间与晶粒间力的立场；也有基于宏观立场(结构力学立场)，即根据建筑物总体的变形和破坏等的力学行为的立场。材料力学则是介于上述微观与宏观立场之间，是研究构成结构材

① 往往将材料力学、结构力学、应用力学分别简称为**材力、结力、应力**。

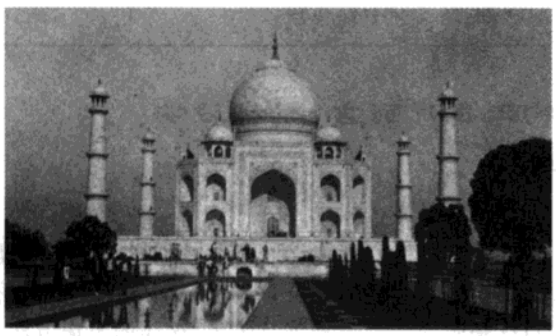
② 当人类的生活变得复杂后，例如对坚固的要求已不再是罗马时代简单的仅是建筑物本身的坚固，为保护人类和人类生活的综合安全性，还包括耐火、防止污染、环境保护等，即其内容已发生了变化。



埃菲尔铁塔



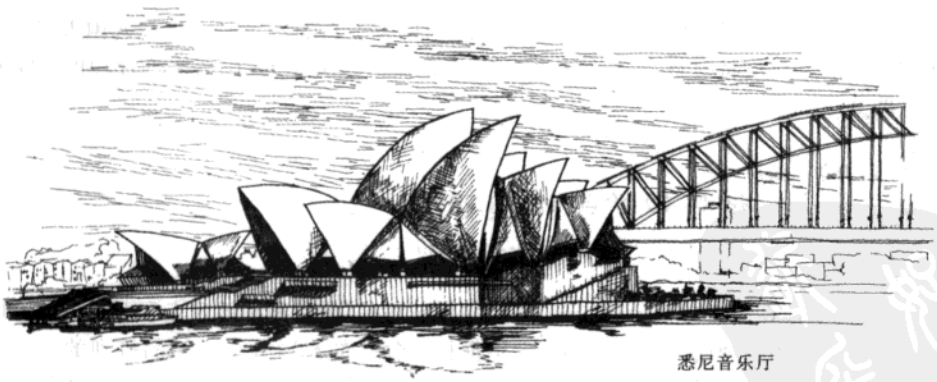
代代木体育馆



泰姬陵 达吉玛哈



安田火灾海上大楼



悉尼音乐厅

图 0.1　结构合理的建筑物是美丽的

料力学行为的学科，它担负着沟通微观-宏观观点的连锁作用。另一方面，结构力学的研究对象是已知其形状、材质和支承条件等的物体，例如建筑物的总体结构、构成结构的刚架和构成

刚架元件的构件(柱、梁、墙、板等)。材料力学提供了结构力学的基础知识,在进行实际建筑物的设计或分析时是将这两门学科作为一体使用的,因此本书也不对二者作特别的区分(图0.2)。

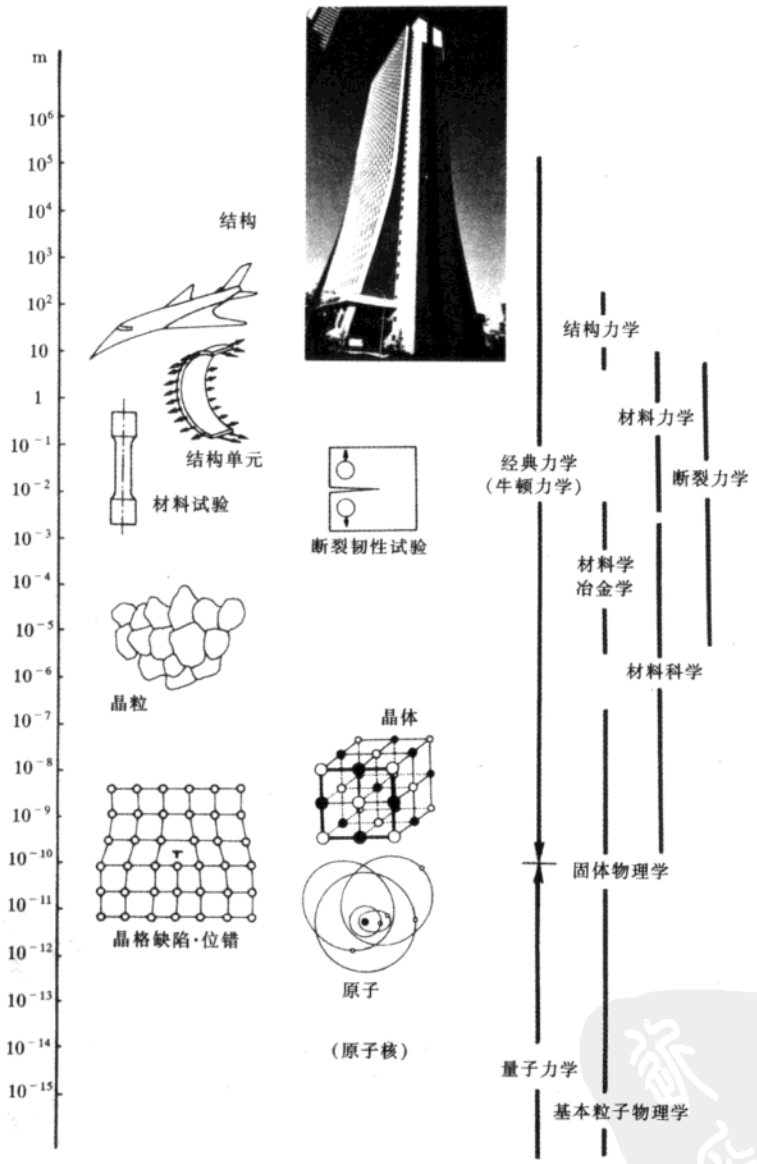


图0.2 学科的领域随研究对象大小的不同而异

1 力学与结构力学的历史

第 1 章的内容：回顾与人类日常生活有密切关系的结构力学的发展过程，加深我们对力学的理解和增加兴趣。

不少人常说："开始对理科还是喜欢的，但遇到了力学就不喜欢了。"这是由于理科开始是以动植物、矿物等可见的物体为对象，故能体验到探索自然奥秘的乐趣。但到了以力学为基础的物理学，由于定义了力、力矩、温度、气压、电压等看不见的量，且为了便于理解物理现象常用数学公式来表达其状态的变化，因此使该学科变得索然无味。也可以这样来认识：由于物理学不是直接从可见的对象来理解，而是必须通过数学公式来理解不可见的对象，这一点正是物理学不被人们喜欢的根本原因所在。在第 1 章中，我们将通过回顾前人如何对不可见的力努力构筑起可见的力学体系的轨迹，从而使我们自己也能实现将不可见的力变为可见的力。



1.1 力与力矩

像寒和暑这样的温度概念，与美味和不美味这样的味觉概念一样，是不能用眼睛来观察，但却是可用身体来感知其存在的量。当人被动物或石头压住时，不管压住你的是生物还是非生物，人们都会无区别地有"受压"的感觉(图 1.1)。因此就给使人感到"受压"的某种量起名为力。人不仅受压有时也受拉，首先将这种使人感到受拉的量与受压同样地也用"力"来表达的人是了不起的。也许他当时已经发现了使物体产生受压或受拉效果具有共同点，并确认了拉、压均为"**力**"(图 1.2)。



图 1.1 不管压你的是生物还是非生物，人在受压时身体都会感受到"力"

可以认为扭转或弯曲也是类似拉、压那样的一种力。实际上，可以由身体感觉到为了产生扭转或弯曲需要大的力。只要施加力时加大力臂的长度(旋转轴到加力点的距离)，则用小的

力便可产生大的扭转或弯曲，这一点是和拉力或压力略有不同的(图 1.3)。有人注意到若能利用这一点，则可用小的力产生更大的力(图 1.4)，因此便做出了“杠杆”、“绞车”这样的工具来完成超过了自己身体能力的工作(图 1.5)。为与力区别，将这种扭转或弯曲称为**力矩**。力矩(M)为力(F)与臂长(l)之积

$$M = Fl \tag{1.1}$$

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \tag{1.2}$$

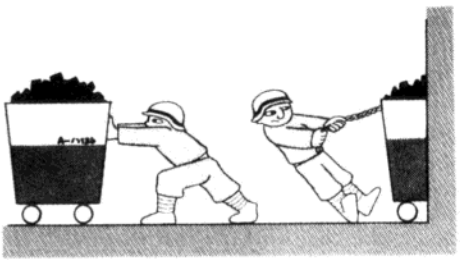


图 1.2 拉或推手推车，手推车都会运动。“拉”、“推”同为“力”的一种



图 1.3 为使物体转动，不仅是力 F，加力点的距离 l 也越大越好。由此人们明白了为使物体转动或弯曲需要另一个与力略有不同的物理量 —— 力矩

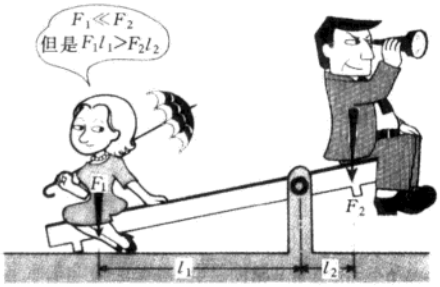


图 1.4 只要加大臂长 l_1，用小的力 F_1 便可举起大的力 F_2。阿基米德证明了存在 $F_1 l_1 = F_2 l_2$ 关系的杠杆原理

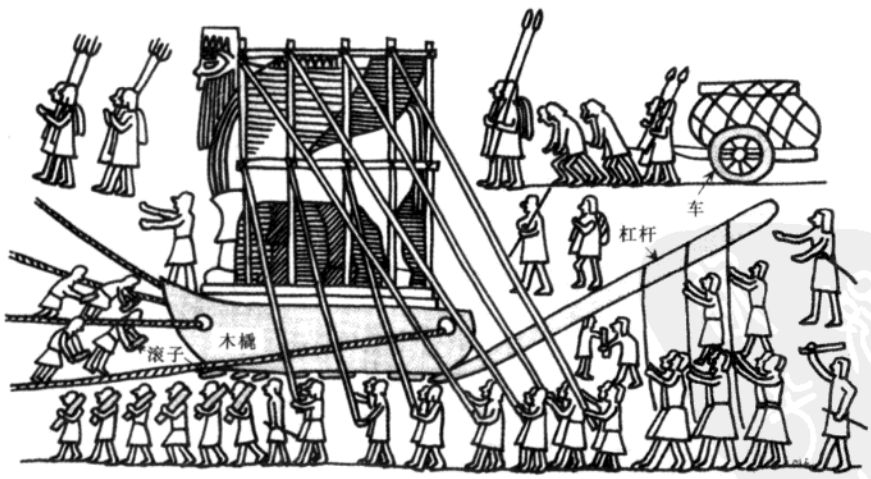


图 1.5 公元前 3500 年幼发拉底的修玛(Sumer)人的壁画，从中可看到杠杆、车、滚子、木橇 —— 日本称之为“修罗”等的力学工具

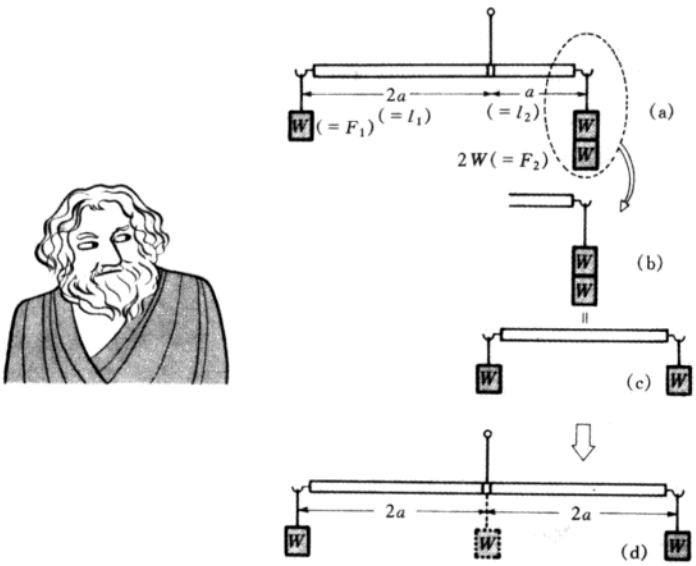


图 1.6　阿基米德证明的杠杆原理

$F_1 l_1 = F_2 l_2 (W \cdot 2a = 2W \cdot a)$

(b) 与(c) 相同。因此(a) 与(d) 相同。由于(d) 明显地是左右对称且平衡的，故(a) 也平衡

以浮力定理闻名的阿基米德(Archimedes，公元前 287 ～ 212)(图 1.6) 证明了以上杠杆平衡原理。而认识到力与杆若不成直角而成斜角时式(1.1)、式(1.2) 应如何变化，则是 1 700 年以后 15 世纪的事。达・芬奇(Leonard da Vinci，1452 ～ 1519) 将正确的答案写在他的笔记本上，即(图 1.7)

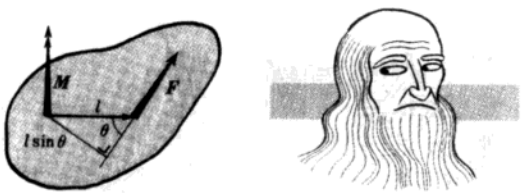


图 1.7　达・芬奇说："是我发现了 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F} (= Fl\sin\theta)$"。实际上在阿基米德以后 1 700 年才明白了应乘以 $\sin\theta$(阿基米德仅证明了 $\theta = 90°$ 即 $\sin\theta = 1$ 的情况)

$$M = Fl\sin\theta (= \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F}) \tag{1.3}$$

$$F_1 l_1 \sin\theta_1 = F_2 l_2 \sin\theta_2 \tag{1.4}$$

式(1.3) 括弧中是用向量形式书写的，这将在 1.7 节详细说明。

那么，"力"或"力矩"还会产生什么作用。

关于"力"有以下两个作用(图 1.8)：

(1) 改变物体的**运动**状态；

(2) 使物体产生**变形**。



(a) 力改变物体的运动状态　(b) 力使物体变形

(c) 力矩改变物体的旋转运动状态　(d) 力矩使物体弯曲

图 1.8 力和力矩的作用

而“力矩”与之十分相似，其作用也有两个(图 1.8)：

(1) 改变物体的旋转**运动**状态；

(2) 使物体产生**扭转或弯曲变形**。

人类根据自身的经验了解了力和力矩，利用它们得到了住房、衣服、食品等，并为节省劳动力制造了大量的力学工具。



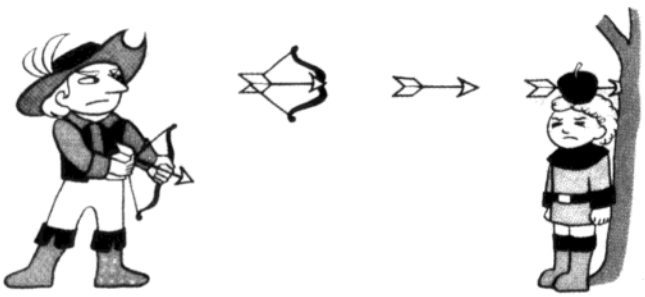
1.2 功与能量

人类发明的工具中，最杰出的要数弓和箭。据说它们是约在 80 万年前与开始利用“火”同时出现的，并成为使弱小的人类得以生存至今并称雄自然界的原因之一。

在力学上，弓和箭的意义也是重大的。这是因为它们开发了将力的形式改变并予以储藏的可能性。人类大概是在试图移动重的动物或石头时就已经明白了有关**功**(W)的概念(图 1.9)。尽管当时的感觉较笼统，但一定已有人这样想：“若今天移动的距离是昨天的两倍，即做了两倍的功，人也一定会感到双倍的疲劳”。人们利用张拉弓做“功”，将这种功通过弓的变形，即作为“能”(称这种“能”为**应变能**)储藏，然后缓缓地瞄准动物将箭射出，储存在弓中的“应变能”转变成箭的**动能**。该箭命中动物时以力的作用刺入动物体内做了“力 × 移动距离”的“功”(图 1.10)。当然当时的人们不可能清楚地认识到上述“功与能的互相转换”关系，直至 18 世纪才由欧拉(Euler，1707 ～ 1783)等将这些概念发展成力学和结构力学的基本原理，并在 20 世纪借助



图 1.9　功(W) = 力(F) × 移动距离(u) × $\cos\theta$
= 力(F) × 移动距离在力方向上的分量($u\cos\theta$)



(a) 张拉弓(做功)　(b) 功作为"应变能"被储存　(c) 当箭离弓时，弓的"应变能"转变成箭的"动能"，箭飞出　(d) 当射中物体时，箭的动能转变成"功"

图 1.10　功与能的互换现象

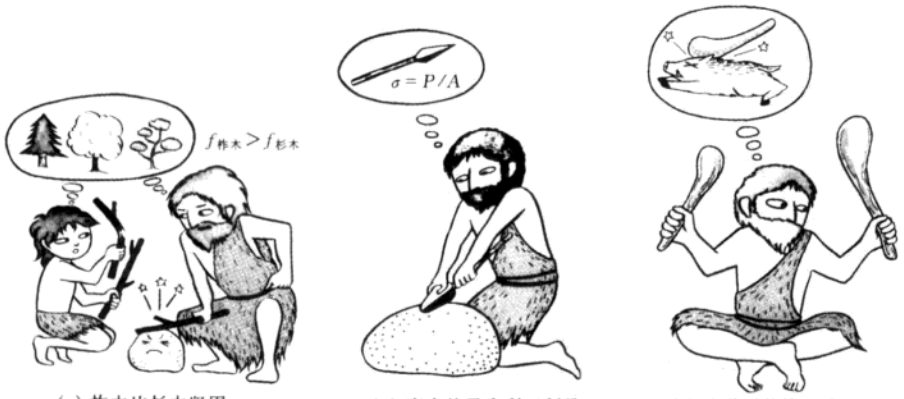
计算机的应用使之开出绚丽的花朵并且建造了巨大而精致的结构。



1.3　力学和结构力学的发展

根据推测，远古人的生活与力学及结构力学的关系要比我们现代人更为密切。远古人为了制造武器、工具和巢(简易住处)及获取食物以延续生存，他们可能已经对木、石、皮等的"材料与力的关系(材料力学)"有了相当的经验和知识(图 1.11)。应用这些知识，人类在约 100 万年以前的原始人时代即已使用将石头磨尖的石器，在约 20 万年以前的旧人类已制作了装有木柄的石枪，在 3 ～ 4 万年前变为新人类后则发明了以弓、箭为首的众多力学工具。公元前 3500 年前后的美索不达米亚人使用车、撬杠、滚子等建造了巨大的石造神殿，公元前 2600 年前后的埃及人已使用吊杆汲水装置及绞车。

希腊人(公元前 7 世纪 ～ 公元 1 世纪)首先将实际生活中所必需的力学知识作为学问进行研究。他们认识到只有通过人类的思考才能了解真理，对他们来说力学既是科学又是哲学。根



(a) 柞木比杉木坚固（材料的强度）　(b) 磨尖的矛头利于刺戳（应力的概念）　(c) 这种形状棒的动量（=质量×速度）大

图 1.11　远古人已知道的各种力学知识

据这样的思路，在当时大致有 3 个学派：一个是认为物质是具有固有运动的爱奥尼亚派；另一个是认为物质是原本静止的艾利(Elea) 派；再一个是既重视思考又重视掌握实际现象的毕达哥拉斯派(Pythagoras，也称亚里斯多德派 —Aristoteles)。提出原子设想的德谟克里特(Democristos) 属于爱奥尼亚派，而发表了希腊英雄阿基里斯追不上龟的诡辩的季诺(Zenon) 则属于艾利派。还有前文的阿基米德及首先制造了将热能转变成运动的机械(称为热力机车) 的希罗(Heron) 则属于亚里斯多德派。

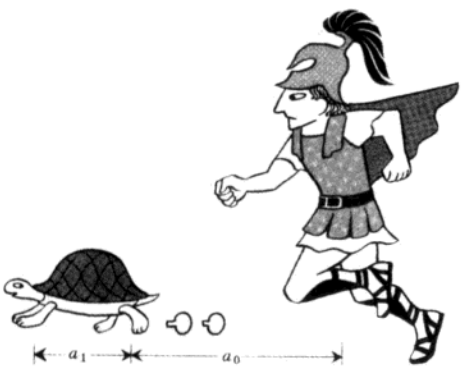


图 1.12　季诺的诡辩 —— 希腊英雄阿基里斯与龟 —— 季诺说："脚下如飞的阿基里斯无论如何也追不上走在自己前面的龟。这是为什么呢？因为在阿基里斯跑了 a_0 的时间内龟在前面前进了 a_1。再当阿基里斯前进了 a_1 时，而龟又前进了 a_2。确实存在有 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$"，但是即使在反复多次(n 次) 后仍然有 $a_n > 0$。所以阿基里斯是追不上龟的。这样，这个世界上所看到的假象与真实是完全不同的，表面上看到的阿基里斯能追上龟，在实际上是错误的。"

罗马人利用拱建造大型的结构，这表明他们对结构力学已有很深的理解(图 1.13)。其后，文化的中心从欧洲移到阿拉伯。近代的力学、结构力学直到时隔久远的 15 世纪的文艺复兴时期才再次在欧洲起源。绘画巨匠达·芬奇不仅正确地理解了前述的力矩概念，还在机械方面提出了许多新的设想。伽里略(Galilei，1564 ～ 1642) 在 590 年发表了题为"重力引起的运动"的论文，推翻了亚里斯多德派所主张的所谓重的物体下落快的学说(图 1.14)。就连我们现代人也仿佛会觉得重的物体比轻的物体下落快(这是由于空气的阻力所致，如果想做实验必须使用大小、形状相同并具有同样表面的二个质量不同的物体进行比较，但那样的物体在实际中是不

易找到的)。伽里略巧妙地用下面的反证法清楚地阐明了自己的观点。

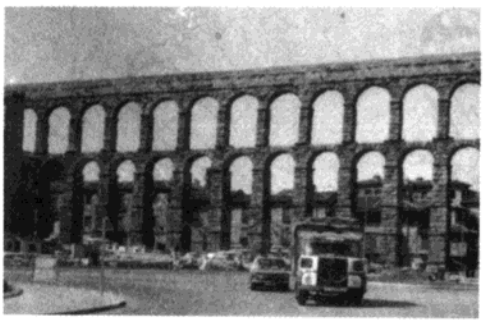


图 1.13　现存的罗马时代的拱(西班牙)

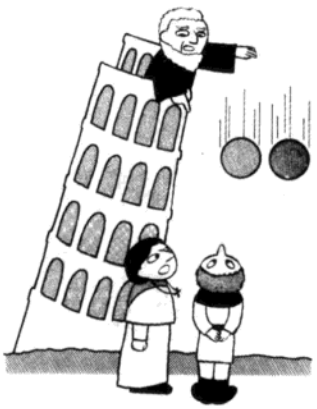


图 1.14　伽里略是近代力学、结构力学的创始者。他写了“重力引起的运动”的论文，认为无论是重的物体还是轻的物体均以相同的速度下落

“先假定亚里斯多德派所说的是正确的，即让重的物体和轻的物体同时下落时，重的物体的下落速度 v_1 比轻的物体的下落速度 v_2 大($v_1 > v_2$)。那么如果将重物与轻物用绳子连接在一起后再让其下落，则其速度 v_3 应为 v_1，v_2 的平均值，即有关系 $v_1 > v_3 > v_2$ 成立。但这样的结论是有问题的，为什么呢，因为将重物与轻物连接成一体后的物体在三者中理应是最重的，因此如果亚里斯多德派的说法是正确的，则应有 $v_3 > v_1 > v_2$ 成立。为了不产生上述的矛盾，必须有关系 $v_1 = v_2 = v_3$ 成立(图 1.15)”。

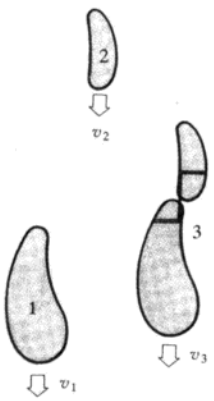


图 1.15　根据伽里略反证法的证明：物体 1 比物体 2 重，如果亚里斯多德派的说法是正确的，则有 $v_1 > v_2$。当将两物体连接后则速度被平均，故有 $v_1 > v_3 > v_2$。但这个结论是有问题的，因为按亚里斯多德派的说法，由于物体 3 最重，故需 $v_3 > v_1 > v_2$。故必有关系 $v_1 = v_2 = v_3$

伽里略因为支持地动说而被宗教诉讼判为有罪，在无奈过着隐遁的生活期间著述了“两个新的科学”。在该论著中，记载了关于结构材料的强度等的实验和观察结果，这便是近代结构力学的开端。

在1.1节中已就关于力的作用叙述了以下两点：

(1) 改变物体的运动状态；

(2) 使物体变形。

在 17 世纪，有两位英国人试图用“数学公式”对力的作用做定量的定义，从而确立了今天的力学和结构力学体系的基础。用数学公式来表示是经验的抽象化和普遍化。

虎克(Hooke，1635 ～ 1703)着眼于力“使物体变形”的作用，发现了“在弹性体上作用的力 F 与物体产生的变形 u 成比例关系”的虎克定律(图 1.16)。这里所谓的**弹性物体**，是指那些在

去掉作用的力后变形也消失并能恢复到原来形状的物体。虎克定律成立的物体确切地应称为**线性物体**(即使在弹性物体中,也存在有力与变形不成比例关系的物体)。远古人曾利用体感和物体的变形等和其他形式对力进行过量的比较(图 1.17)。在古希腊时代,阿基米德讲明了力矩的**平衡**。在其后的罗马时代,杠杆已被广泛地使用,虎克也证明了"弹簧秤"的原理。

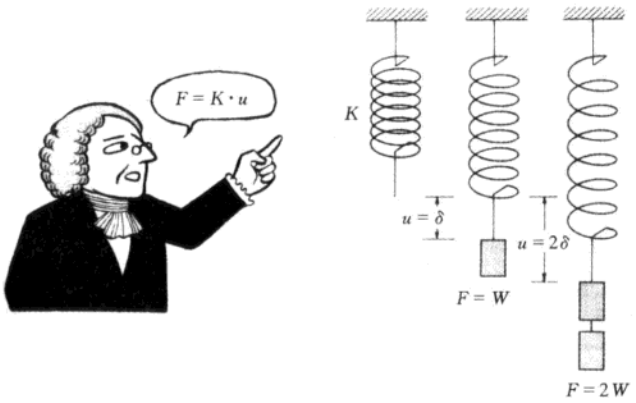
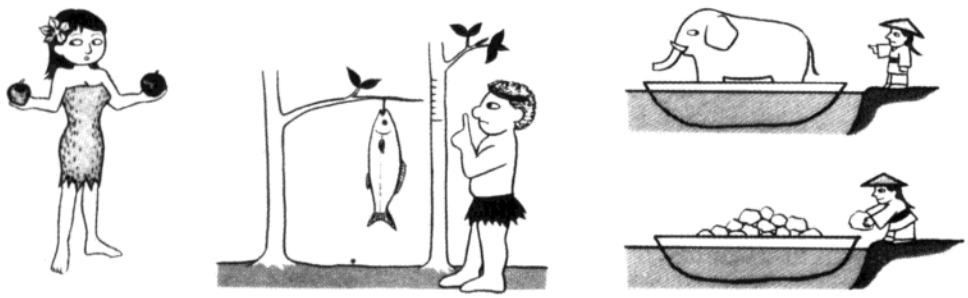


图 1.16 虎克说:"虽然有人说虎克定律的发明者不是我,但以我的名字来命名这个重要的公式不是很好吗"



(a) "哪个苹果重呢?" (b) "昨天吊的鱼重。" (c) "我是个聪明人,连象的重量也会测定。"

图 1.17 古代人开始时是根据(a)体感,或(b)、(c)物体的变形或移动,对力进行量的比较测定。被定量掌握的力,在下一阶段将用数学公式来表示

牛顿(Newton,1642 ~ 1727)讲明了力"改变物体运动状态"的作用。例如,试用手指推桌上的橡皮,如果将手指挪开不使橡皮受力,则橡皮静止。由于静止表示**速度**为零,故力为零,速度也为零。大的力产生大的速度,因此理所当然地会想到力与速度成比例关系。既是哲学家又是数学家的笛卡儿(1596 ~ 1650)就是假设 $F = mv$[①] 的,m 是比例常数。可是将放在桌子上的球推一下,球一旦被推动后即使不再施加力 F 也能够在桌上滚动一会儿,即 $F = 0$ 而 $v \neq 0$(不等于零),因此笛卡儿的想法是错误的[②]。此时倒不如认为只是在力 F 作用期间,速度才发生变化(图 1.18)。将速度变化的比率称为**加速度**(用 a 表

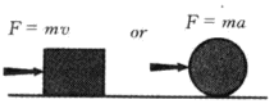


图 1.18 笛卡儿说:"当用力 F 推橡皮时,力 F 与速度 v 好像成比例。"
牛顿说:"当用力 F 推球时,应认为力 F 与加速度 a 成比例更妥当。"

① mv 是力学中所说的动量。恐怕远古人就已知道了大的动量会对受力对象造成大的伤害(图 1.11)。

② 桌上的橡皮在 $F = 0$ 时有 $v = 0$ 的现象是因为在桌子与橡皮之间存在的摩擦力,与橡皮的运动方向相反,起着阻止运动的作用。

示），力 F 与加速度 a 相互关联即有函数关系，试设 $F = f(a)$，并可大胆地假设 F 与 a 之间具有最简单的比例关系。

$$F = ma \tag{1.5}$$

实际上这就是牛顿得出的力学基本公式。他将比例常数 m 称为物体的**惯性质量**，并以该式为中心将力学的基本原理归纳成以下 3 个定律（图 1.19）。



(a) **惯性定律**。“什么？对处于静止状态的物体不施加力它就不动吗？让我用魔术动给你看！”



(b) $\boldsymbol{F = ma}$。“最近我们的女当家的 m 又增大了，即使用撬棍也无法将她从电视机前撬动！”



(c) **作用与反作用定律**。“别推！”，“什么？是你在推呀！”

图 1.19 牛顿力学的基本定律

第一定律：惯性定律。

第二定律：$F = ma$。

第三定律：作用与反作用定律。

后来，牛顿又加进了**“万有引力法则”**（图 1.20）。

$$F = \frac{-km_1m_2}{r^2} \tag{1.6}$$

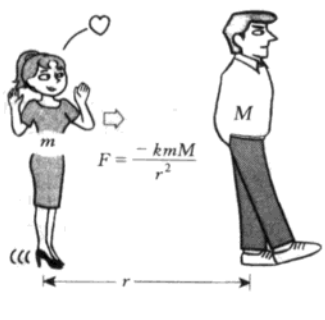


图 1.20 “啊，美男子！我似乎被万有引力 F 所吸引。”



图 1.21 “不用说地球上的事，就是从原子直至大宇宙，只要是力学问题均可用牛顿的 4 个定律来处理。”

他用上述 4 个定律成功地说明了不仅包括地球而且还包括了其他星球的运行等宇宙中的力学现象（图 1.21）。但牛顿并没有将“万有引力法则”作为第四定律与上述 3 个定律同时叙述。

基本定律的数目以少为好。第二定律是力的定义公式，即回答“力是什么”，而万有引力也

是力的定义公式。如果用这两者中的任何一个就可以将力完全定义的话，则另一个就不再需要。此外，如果必须同时用两个公式来定义的话，则说明用其中的任一个公式作为定义均是不完全的，必定另外存在着只需一个公式便可定义的公式。想必牛顿一定是这样考虑的，并将万有引力法则从基本定律中除去，其实这两个公式的存在却在后世引起了争议。对一个物体而言，在式(1.5)，式(1.6)中的质量 m 是否相同，这是最初的疑点，根据尤特维修(Eotvos，1848 ～ 1919)的实验证明的确是相同的。力的更好的定义公式是在 20 世纪由爱因斯坦(Einstein，1879 ～ 1955)在“场的理论”中提出的(图 1.22)。

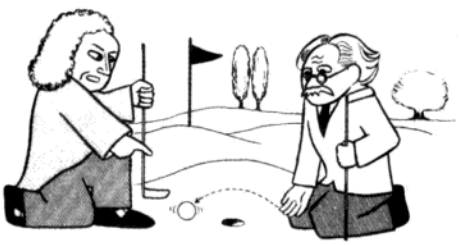


图 1.22 牛顿说：“因为球受了力所以走了曲线。”爱因斯坦说：“不对，因为地面凹凸不平所以球才走了曲线。”

对我们研究的对象 —— 结构力学而言，首先不存在用式(1.6)表示“万有引力”而产生的问题，此外用“场的理论”也不便于处理，所以使用的公式就是牛顿的第二定律。牛顿在发表第二定律的同时，在数学上也获得了伟大的业绩，他也是微分学、积分学的创始人①。



1.4 微分与积分(已理解了微分、积分意义的读者可跳过本节)

假设让汽车以时速 60 km/h 行驶 2 h，则移动的距离为 $60\times 2=120$ (km)。如果假设在开始的 1 h 以时速 60 km/h，其后 30 min(0.5 h)以时速 90 km/h，最后的 30 min 以时速 70 km/h 行驶时，则移动的距离为

$$60\times 1+90\times 0.5+70\times 0.5=140\ (\text{km})$$

上式的左边是先相乘再相加的运算，而**积分**也正是“先相乘后相加”的运算。如图所示，积分就是求面积的过程(图 1.23)。由于汽车实际速度的变化更为复杂，假设从时间 t 到 $t+\Delta t$ 速度用 $v(t)$ 表示，则从时刻 t_1 到 t_2 的行驶距离 r 可用下式来计算。

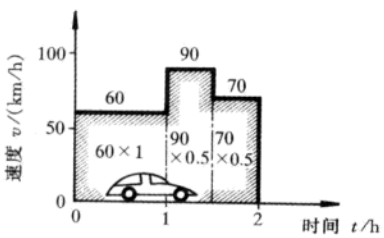


图 1.23 用图表示时间和速度的关系，行驶距离 r 等于阴影部分面积

$$\begin{aligned} r &= \sum_{t=t_1}^{t_1+n\Delta t} v(t)\Delta t \\ &= v(t_1)\Delta t + v(t_1+\Delta t)\Delta t + \cdots + v(t_1+n\Delta t)\Delta t \end{aligned} \tag{1.7}$$

式中，$n=\dfrac{t_2-t_1}{\Delta t}$

① 与牛顿几乎是同时代的莱姆尼兹(1646 ～ 1716)也发现了微分、积分，一般认为这两人是创始者。这说明了在那个时代，人类的知识环境已具备了发现微分学、积分学的条件，如果没有牛顿或莱姆尼兹，也一定会有其他人发现的。

式(1.7)表示求出 $v(t)$ 与 Δt 的乘积后(图 1.24 中涂虚线的部分)再求和,即图中打点范围的面积。Σ 是大写的希腊字母[①](相当于英语的 S,为 sum 的第一个字母),是表示求和的记号。当 $v(t)$ 的变化细微时,应取很小的 Δt 值。当 Δt 趋向于极小时,即设 $\Delta t \to 0$(Δt 接近于零),这相当于取分割数 $n \to \infty$(n 趋向于无穷大),此时将 Δt 写为 dt,用 S 上下拉长后的形状 $\int$ 表示 Σ,式(1.7)变为

$$r = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (n \to \infty)}} \left(\sum_{t=t_1}^{t_1+n\Delta t} v(t)\Delta t \right) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \qquad (1.8)$$

称式(1.8)为 $v(t)$ 的(定)积分[②]。取横轴为 t、纵轴为 $v(t)$,由图可清楚地看出,定积分就是被 $t = t_1, t_2$ 和 $v(t)$ 及 t 轴所包围部分的面积(图 1.25)。

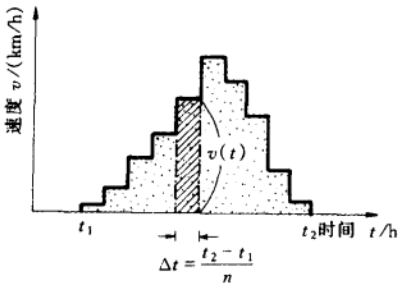


图 1.24　即使行驶时速度不断变化,行驶距离 r 也等于用点表示的面积,可用公式表示为

$$r = \sum_{t=t_1}^{t_1+n\Delta t} v(t)\Delta t$$

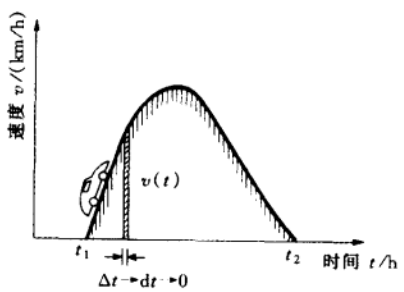


图 1.25　如图所示,即使时速随时间连续地变化,但行驶距离 r 仍为斜线包围部分的面积,这可由下式看出

$$r = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (n \to \infty)}} \left(\sum_{t=t_1}^{t_1+n\Delta t} v(t)\Delta t \right) \to \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

称这种细分割后先相乘再叠加的,诸如求面积等的运算为积分

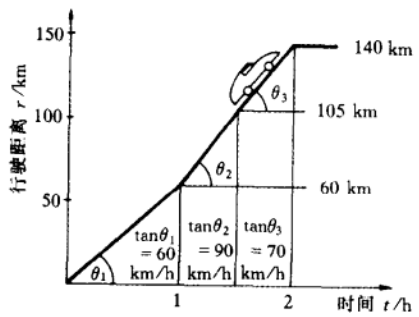


图 1.26　当描绘时间与行驶距离的关系图时,图中的斜率($\tan\theta$)即为行驶速度(时速)。当然,时速用 $v = \dfrac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}$ 来表示。

将与"相乘后相加"的积分运算相反的运算,即"相减后相除"的运算称为**微分**。再举汽车行驶距离与速度的问题。行驶距离 r 为时间 t 的函数,可写成 $r(t)$。取横轴为 t、纵轴为 $r(t)$ 作图(图 1.26)。例如从 t_1 到 t_2 间的平均速度 v 可由下式求出

$$v = [r(t_2) - r(t_1)]/(t_2 - t_1)$$

① 希腊字母常作为数学、力学的记号使用,将与其发音相对应的英文字记于附录的附表 A9.1 中。

② 称 $\int v(t)\,dt$ 为不定积分,而将积分时独立变量(这里是 t)的区间明确的 $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ 则称为定积分。

$$= [r(t_1 + \Delta t) - r(t_1)]/\Delta t \tag{1.9}$$

式中，$\Delta t = t_2 - t_1$

即 v 可由“相减后相除”的运算求得。当 Δt 大时，从时刻 t_1 到 t_2 之间既有快速行驶的区间，也有慢速行驶的区间，可求得包括了所有区间的平均速度。如取 Δt 很小时，可求得在 t_1 附近的速度，当 $\Delta t \to 0$ 时正好求得在 t_1 的速度 $v(t_1)$。也可由图看出，这相当于 $t = t_1$ 时在 $r(t)$ 上所引切线的斜率($\tan\theta_1$)。称它为 $r(t)$ 在 t_1 时的微分①。微分可写成下式

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{r(t_1 + \Delta t) - r(t_1)}{\Delta t}\right) = \tan\theta_1$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} \tag{1.10}$$

可见当将 $v(t)$ 积分则可得 $r(t)$，反之当将 $r(t)$ 微分可得 $v(t)$。②(图 1.27)。

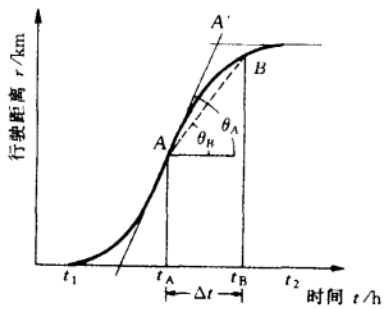


图 1.27 行驶中速度时刻变化时，行驶距离与时间之间的关系为曲线 $r(t)$。时刻 t_A 与 $t_A + \Delta t$ 之间的平均速度为 v_B

$$v_B = \frac{r(t_A + \Delta t) - r(t_A)}{\Delta t} = \tan\theta_B$$

当 Δt 取值越小则越接近于 t_A 时刻的速度，直线 AB 无限逼近 A 点的切线 AA'。AA' 的斜率即是时刻 t_A 的速度 v_A，即

$$v_A = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{r(t_A + \Delta t) - r(t_A)}{\Delta t} = \tan\theta_A = \left.\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_A}$$

称此运算为微分。微分正好是积分的逆运算。

如图 1.27 所示，将 $r(t)$ 微分所得的 $v(t)(=\tan\theta)$ 是随 t 的变化而变化的。当考虑到由于 $[v(t+\Delta t) - v(t)]/\Delta t$ 是表示在 Δt 的时间区间内 $v(t)(=r(t)$ 的微分值) 速度的平均变化率，当设 $\Delta t \to 0$ 时可求得时刻 t 的 $v(t)$ 变化率、即加速度 a

$$a = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \left(\text{记为}\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{1.11}$$

若利用这个关系式，则牛顿第二定律可写成③

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.12}$$

显而易见，“微分和积分”运算与“加法和减法”、“乘法和除法”的运算相同，均是互为逆运算的。但是，由于 $f(x)$ 与 $f(x)+C$ 的微分值都为 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ 的积分结果应加上 C，即 $f(x)+C$(图 1.28)。

① 式(1.10)中的 v 是 t 的函数 $v(t)$，称为 $r(t)$ 的微分系数。此外也称式(1.10)中的 $v(t)$ 为 $t = t_1$ 时的导函数。在数学中微分的正确定义是 $\mathrm{d}f(x)(=\{\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x\}\mathrm{d}x)$，但一般将导数 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x(=f'(x))$ 也简称为微分。

② 一般如有 $\mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x = f(x)$，则有 $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$，称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的不定积分。

③ 牛顿是设 $F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ 的，式中 $p = mv$(动量)。正确地说，牛顿定义的“动量的时间微分等于力”比式(1.12)更好，这一点在 20 世纪已被爱因斯坦所阐明。但我们这里使用式(1.12)是完全没有问题的。

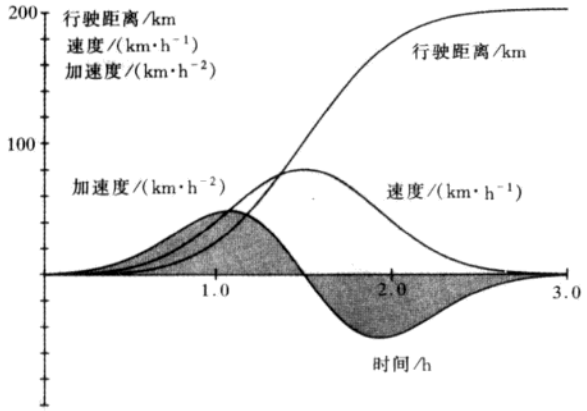


图 1.28 如已知行驶距离 $r(t)$，则速度 $v(t)$ 可用 $v(t)=\mathrm{d}r(t)/\mathrm{d}t$ 求得。同时，如 $v(t)$ 已求得，则加速度 $a(t)$ 可用下式求得

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2r(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

即加速度 $a(t)$ 是在时刻 t 时 $v(t)$ 的变化率

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\to a(t),(\Delta t\to 0)$$



1.5 牛顿以后

牛顿将他的辉煌成果收集在名为“原理”的书内[①]，于 1687 年发表。18 世纪、19 世纪是牛顿力学得以证实和发展的世纪。同时在我们生存的三维空间中欧几里德几何学成立，没有人会怀疑在该空间中的平行线决不会相交。1736 年欧拉著有“从力学或解析学角度来研究的运动科学”一书，8 年后又发现了最小作用原理，确立了变分法的基础。达朗贝尔(d'Alembert，1717～1783) 将牛顿第二定律表示成 $F-ma=0$ 形式，即若在力不平衡而运动着的物体上加上 $-ma$ 的假想力(惯性力)，则可将问题作为力的平衡问题进行处理(图 1.29)。拉格朗日(Lagrange，

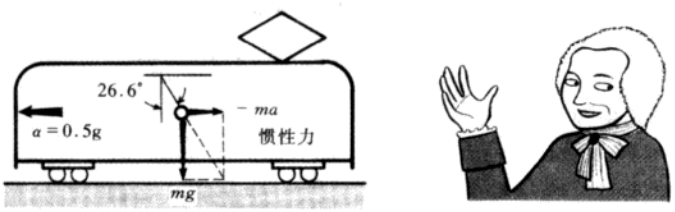


图 1.29 达朗贝尔说：“以加速度 $a=0.5g$ 行驶着的电车的吊带倾斜约 27°。”这是由于对吊带而言，除了重力 mg 外尚作用有 $-ma$ 惯性力所致，将问题改为力的平衡问题求解则是很简单的。”

1736～1813) 于 1778 年发表了“分析力学”将牛顿力学归纳成完美的形式。库仑(Coulomb，1736～1806) 处理了土压问题，并发现了应该说是电磁学中的万有引力法则的“库仑定理”。进入 19 世纪后，哈密尔顿(Hamilton，1805～1865) 进行了从光学现象到力学现象的研究，确认了光学与力学之间的相似性，并将运动方程式以适用性更广泛的“哈密尔顿原理”的形式表现

① 牛顿：“自然哲学的数学原理”(1687 年)，简称“原理”—— 译者注。

了出来。麦克斯韦(Maxwell,1831 ～ 1879)认为牛顿力学对构成物质的分子的运动也适用,利用它对数量庞大的分子现象进行了处理,从而创始了统计力学,并说明了热力学与力学的密切关系。但是他发现牛顿力学不适用于电磁学,并将法拉第(Faraday,1791 ～ 1876)的场理论以数学形式表达,从而创立了电磁学的体系,这也开拓了通向 20 世纪的爱因斯坦相对论的途径。爱因斯坦的力学(参照 1.3 节,图 1.22)也是在前人研究的积累上才能实现的。

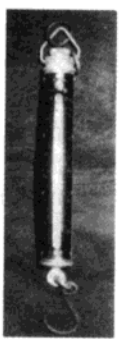


1.6 力的存在

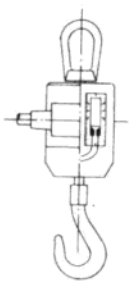
通过体感认识的力,在 17 世纪到 20 世纪曾用公式来表达,这个远远超越我们日常经验的力的世界一直是现代物理学探索的对象,直至采用变形了的非欧几里德空间。

但是对于结构力学而言,人们已熟悉了的牛顿定律是足够用的。不过仅仅有牛顿定律,在实际应用中尚留下很多难以处理的问题。为理解这些问题首先需要的既不是体感也不是公式,而是试着用眼睛来观察力。

讲义到此,可认为读者已知道了如何用眼睛来观察力,即可通过力的作用效果来观察力。一种是利用物体的变形来观察力,弹簧秤及应变计(图 1.30)属于这一类。另一种是通过测定物体的加速度也可知道物体所受的力,图 1.31 所显示的是用加速度计捕捉到的地震加速度。

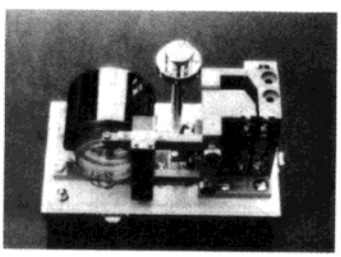


弹簧秤



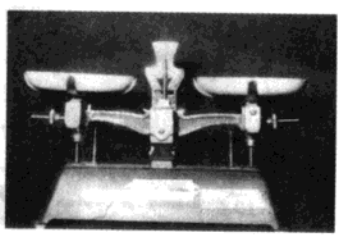
应变计型荷载变换器(荷载单元)

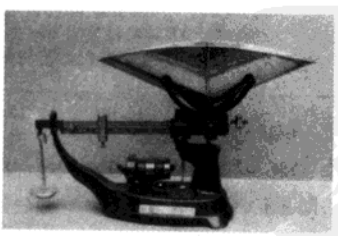
(a) 利用变形



脉动仪

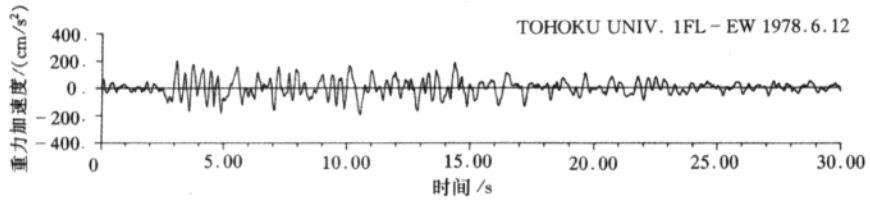
(b) 测定加速度



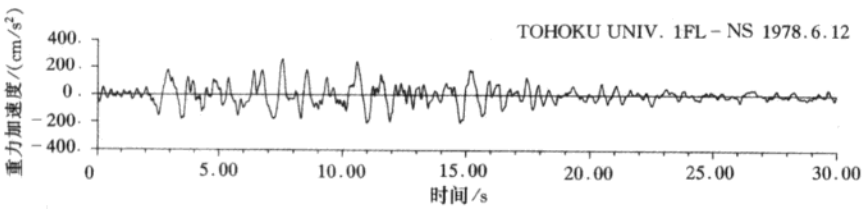


(c) 力矩的比较

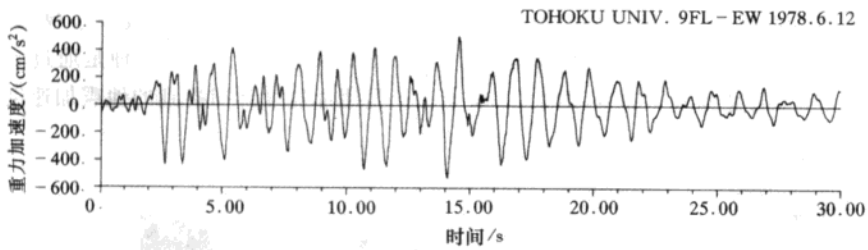
图 1.30 力的计量方法



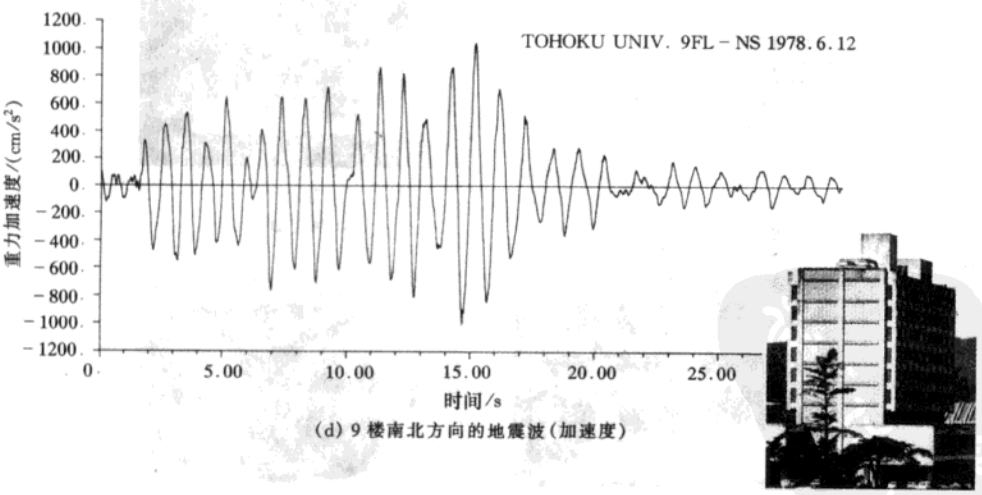
(a) 1 楼东西方向的地震波(加速度)



(b) 1 楼南北方向的地震波(加速度)



(c) 9 楼东西方向的地震波(加速度)



(d) 9 楼南北方向的地震波(加速度)

图 1.31 加速度计的记录:1978 年 6 月宫城县海上地震时在东北大学建设系大楼记录到的加速度——9 楼(NS:南北方向)的最大加速度值,它是建筑物上记录的目前世界最大的地震记录

为便于利用图表现力，人们使用**箭头**符号。在图 1.32 中显示了向动物投射的箭，它确实给出了对动物施加力的实感。并且，从感觉上也可理解箭头的方向也就是力的方向。还可感觉到，当被射中时大箭比小箭更痛，即容易感受到力作用的大小。因此如图所示，当用箭头表示力时，规定："用箭的轴表示力的**作用线**，用箭头的指向表示力的**方向**，用箭的长度表示力的**大小**"。不过不论是箭的根部（A 点）或箭的端部（B 点）则均可作为力的作用点[①]。

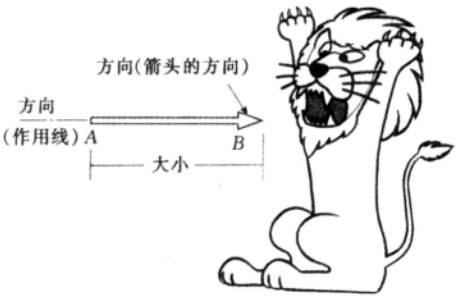


图 1.32 力的表示方法：用箭头表示的力在直观上容易理解

力矩的表示方法如图 1.33 所示，一种是在圆弧上标以箭头的方法，另一种是标以两个箭头的符号（双箭头符号）来表示。

用圆弧表示的方法虽然直观上容易理解，但在表示作用在空间结构上的力矩时，由于图形变得复杂，所以常用双箭头符号代替圆弧。圆弧与双箭头符号之间存在"右螺旋关系"，即在拧紧右旋的螺丝时，按照旋转螺丝的方向与螺丝前进的方向相同的原则来表示箭头的方向（图 1.34）。

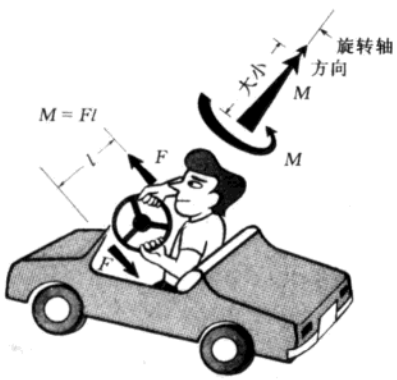


图 1.33 力矩的表示方法：有双箭头符号和圆弧两种方法



图 1.34 相当于旋转右螺旋时的旋转方向



1.7 向量

用箭头符号表示力（用双箭头符号表示力矩）的方法非常符合人类的直观感受，进而由它

① 对物理学所研究的刚体（完全不发生变形的假想物体），将位于力作用线上刚体的任意点作为作用点，其作用效果均相同。但是在材料力学和结构力学中，由于所研究的是变形物体，故当作用点位置不同时（即使它们位于同一作用线上）产生的变形也是不同的。

发展产生了向量及向量代数学。如图 1.35 所示，人在曲线 s 上行进时可用直线的箭头符号 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示其在 t s 后的位置，它与 $t+\Delta t$ s 后的位置 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 之差 $\boldsymbol{r}(\Delta t)$ 表示在 Δt s 内人的移动。用简单的数学公式来表达，则十分方便：

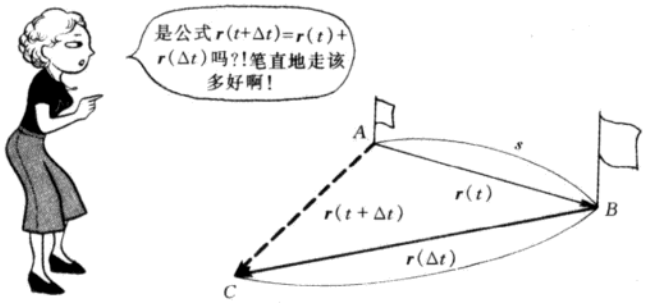


图 1.35　数学体系的建立是用来便于表达实际现象。向量运算就是这样的数学体系之一

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}(\Delta t) \tag{1.13}$$

当然，由于对具有大小、方向、作用线这样三个要素的箭头符号之间的加法运算，不像 $2+3=5$ 那样简单。$\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{r}(\Delta t)$ 是大小、方向、作用线不同的两个箭头符号，两者相加所得的 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 的大小、方向、作用线与 $\boldsymbol{r}(t)$、$\boldsymbol{r}(\Delta t)$ 中的任意一个都不相同（图 1.35）。但是，读者马上便可以明白，实际上是存在着极其简单的计算方法的（参照 3.1 节）。

试再观察另一事例。在船由 A 向 B 开动过程中，设 Y 君在船上由 A 走到 C，这样 Y 君相对于地球又是如何移动的呢？由于 Y 君起始的位置 A 与终了的位置 C' 是已知的，所以答案应是 $\overrightarrow{AC'}$（由 A 向 C' 引的箭头符号）。根据图 1.36 可明显地看出有

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \tag{1.14}$$

在移动的计算中，这种加法公式可利用如下法则[①]求出："用箭头符号表示的量（称此为**向量**[②]）之和可由连接箭头符号来求得"。对这样的向量运算体系整理归纳而建立的数学称为向量分析。

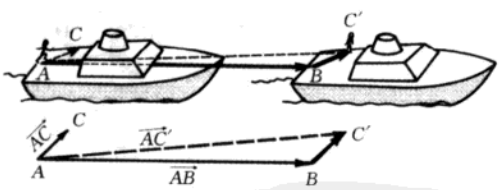


图 1.36　向量的加法运算：船由 A 向 B 开动，Y 君在船上由 A 移动到 C。结果 Y 君由 A 移动到 C'。用向量的加法运算（平行四边形法则）来表示，即为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$

图 1.35 中的 $\boldsymbol{r}(\Delta t)$ 是在 Δt 时间内的移动量，因此 $\boldsymbol{r}(\Delta t)/\Delta t$ 是在 Δt 时间内的平均速度。因为 $\boldsymbol{r}(\Delta t)$ 是向量，故用 Δt 除后所得的速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 仍然是用箭头符号表示的量，即向量。同理可推得在 Δt 时间内作为 $\boldsymbol{v}(t)$ 的平均变化率的加速度 $\boldsymbol{a}(t)=[\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)]/\Delta t$ 也是向量，事实也正是如此。此外用比例常数（实际是质量）m 乘以 $\boldsymbol{a}(t)$ 所得的力 $\boldsymbol{F}$ 也是向量。当两

① 向量的加法公式也称"平行四边形"法则。

② 对向量先作如下定义：不仅有大小，还有方向和作用线的量。对向量更明确的定义请参照附录 4。

个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 作用于一点时，其效果与由 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 所形成的平行四边形对角线 $\boldsymbol{F}$ 相等，这些事项人类在很早以前就知道了(图 1.37)。

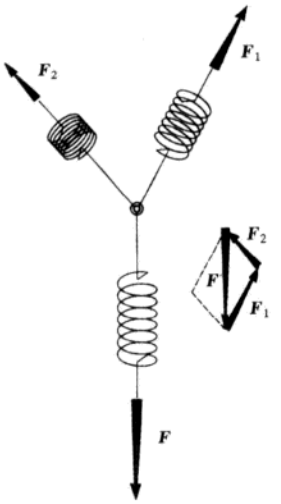


图 1.37 作用于一点的三个力的平衡。平行四边形法则(也称三角形法则)

与向量相对应的是标量。标量是指只要知道大小便可记述该量全部性质的物理量。例如时间 t、质量 m、温度 T 等很多的量都是标量，功与能量也都是标量。

力矩是力臂的长度 $\boldsymbol{l}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 之积(式(1.3)，图 1.7)，前文已叙述了可用箭头符号来表示(1.6 节)。力矩是有大小、方向、作用线的向量。另一方面，也可用力 $\boldsymbol{F}$ 与移动量 $\boldsymbol{r}$ 之积来表示功 W(参照 1.2 节)，但是对上述的乘积需作进一步的考虑。当在平坦的地面上移动石头时，无论是朝东拉使它向东移动还是朝北拉使它向北移动，只要移动量相同则疲劳的程度也相同，所以可认为功 W 是只要知道大小就可以定性的量即应为标量。因此两个向量乘积的结果便有两种可能：

(1)(向量)×(向量)→(向量)　例如：力矩 $\boldsymbol{M}$

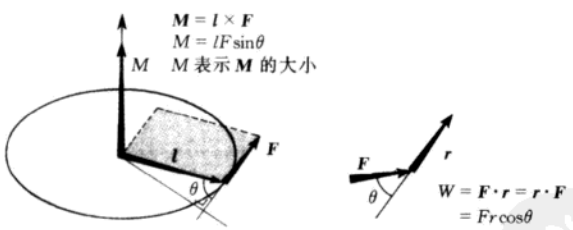
(2)(向量)×(向量)→(标量)　例如：功 W

自然现象是不以人们的意志为转移的。在自然现象中如果向量的积出现两种结果，则应修正人类所创造的数学方法使之与自然现象相吻合。因此对向量的积的定义有两种类型，其公式如下

(1) 向量积(外积)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$(向量)

(2) 标量积(内积)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=c$(标量)

即按照符合自然现象的原则定义了 $\boldsymbol{c}$ 和 c。首先关于向量积 $\boldsymbol{c}$，根据巨匠达·芬奇的定义，$\boldsymbol{c}$ 的大小为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$*[①]，其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所形成的平面，指向为由 $\boldsymbol{a}$ 转到 $\boldsymbol{b}$ 时的右螺旋方向。在 1.6 节中已阐述了双箭头符号的意义在这里得到了明确，即表示以箭头符号为轴的右螺旋方向旋转，其旋转量是用箭把的长度来表示的(图 1.38)。



(a) 向量　　(b) 标量

图 1.38 由于在自然现象中存在两类向量积，所以对向量积的运算也考虑两类，即

向量积(外积)$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{F}$(相乘的结果是向量)

标量积(内积)$W=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}$(相乘的结果是标量)

① $|\boldsymbol{a}|$表示了 $\boldsymbol{a}$ 的大小，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 等于由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所构成的平行四边形的面积。

另一种标量积 c，它也是根据符合自然现象而定义的。当想使石头向东移动而将之朝东拉时，如果石头却随意地向北移动，这样是做不了功的。宛如拉石头上坡时，石头却滚了下去，这样他所做的努力好不容易将石头拉上半坡所做的功将全部作废。因此将作用力的方向和移动的方向与功的大小建立关系的考虑方法是正确的。故标量积被定义为 $c = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$（图 1.38），重新将上述内容归纳如下

(1) 向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ (1.15)

(2) 标量积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = c$，$c = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ (1.16)

用箭头符号来表示是眼睛所能见的，其加法运算（式(1.14)，即 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$）及乘法运算（式(1.15)、式(1.16)）是明确的。至此可以看出向量具有很大的优越性，尤其是对仅需画图便可求解的问题，向量的威力是巨大的。但对不太擅长通过作图再进行计算的电子计算机来说，人们可能会担心：如何让计算机理解向量并进行数值计算？答案是明确的。应用计算机正好适合于对设置坐标并用向量的分量进行数值计算，这将在下一章中叙述。利用计算机进行结构分析的核心方法是矩阵分析法，该法不过是上述对向量的分量进行数值计算的扩展而已，该方法特别适合于计算机却不适合于人工手算。



1.8 现代结构力学中存在的问题

18、19世纪的科学家运用虎克的公式：$F = ku$（F——力，u——变形，k——比例常数＝刚度，弹簧常数）及牛顿第二定律：$F = ma$（F——力，a——加速度，m——比例常数＝惯性质量）建立了弹性力学。例如弹性力学中的一个基本公式纳维公式，仅用一组（三个）公式便可表示地震波中的初动波（P波）、剪切波（S波）、表面波（瑞利波、乐夫波）等（图 1.39）。

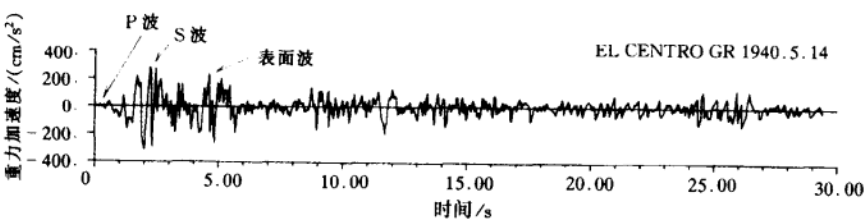


图 1.39 在地震记录中各种波混杂在一起，但是只要利用纳维叶公式便可对这些波作出说明

进入20世纪后半期，学科、研究在被细化的同时，它们的综合化也在发展，人们感兴趣的问题逐渐由结构的弹性行为转向结构的承载力及破坏问题。图 1.40 表示了钢材的拉伸实验结果。在虎克定律已不适用的范围内，尽管变形很大但仍具有足够的承载力。将除去外力后可恢复原来形状的范围称为**弹性区域**，将有残余永久变形的范围称为**塑性区域**。若结构长期处于塑性区域时，其永久变形会发展从而产生各种问题，所以对经常作用的外力进行设计时要保证结构处于弹性区域内；当发生很大的外力，例如地震作用为分析对象时，可利用塑性区域中的残余承载力。为此需在抗震设计中研究极限承载力（结构所具有的最大承载力，当然包括塑性区

域的承载力）问题。

进入塑性状态意味着材料的一部分已发生破坏，随着物理学的进步，无论是从微观的，即从分子及晶体结构的立场进行研究，还是从宏观的，即从构件的极限承载力的立场进行试验等均不断地得到发展。由于出现了像制造飞机等那样的必须非常节省材料的结构，故对屈曲问题（承受压力的柱突然向横向挠曲的现象，图 1.41）展开了大量的研究（图 1.42）。在进入本世纪后半期，以热力学的诸法则和现代数学为基础，进一步从理论上对力学归纳和提高的趋势也十分明显。

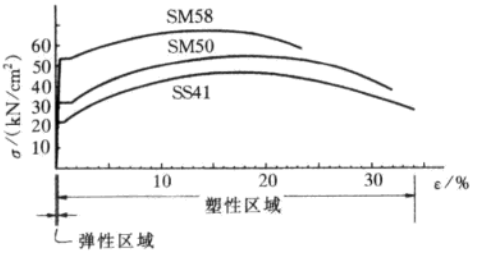


图 1.40 钢材的拉伸试验结果：SS41 是抗拉强度为 41 kN/cm² 的结构用钢材，SM50 是含有锰及其它元素、抗拉强度为 50 kN/cm² 的结构用钢材，其焊接性能好

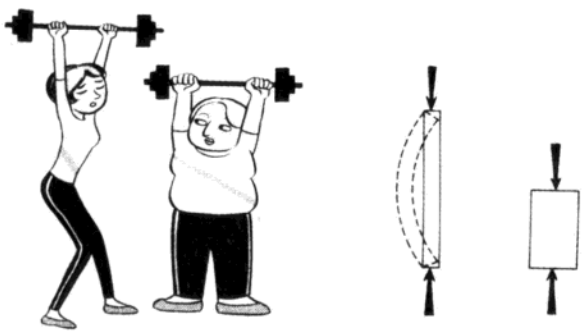


图 1.41 屈曲现象："粗壮而结实的不易屈曲！"

但是要说 20 世纪后半期结构力学最显著的特征，应该是利用计算机进行近似的数值分析方法的发展。即使对虎克定律成立的线性结构，能用解析法求解，即将解（结构的变形及应力状态①）用数学公式的形式来表达，但也仅仅只有数例。如果用数值分析②的方法，对线性结构而言是没有不可求解的问题，就是对进入塑性区域的结构也是可以求解的。

现代力学的另一个特征是引入了概率、统计的方法。一方面作用在结构上的外力具有很强的概率性质，另一方面承受外力的结构承载力也不像设计时所使用的那样，而是具有离散

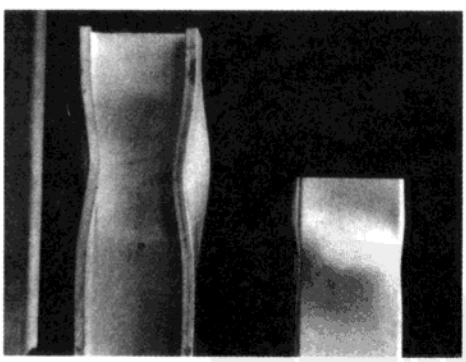


图 1.42 有的柱，它在整体上不屈曲而仅在柱的一小部分出现屈曲现象，称为局部屈曲

① 所谓应力是指"相应于"施加在物体上的外力，在物体内部产生的力（参照 2.1 节）。

② 数值分析的解答以数值的形式出现。由于不是公式，故对诸如当改变材质时会如何变化、当改变厚度时又会如何变化等问题，即当需观察各因素的影响程度及倾向时是不便的。但是在进行了大量的计算后通过对所得的数值进行的比较仍是可掌握其变化的倾向性。

性，故也是具有概率性。结构物的使用者想向设计人员和施工人员提出的问题是：结构究竟是否安全，即具有多大程度的“可靠性”。无论是断裂的理论还是可靠性的理论目前都尚不成熟。这些也是研究者今后应该研究的遗留问题之一。

牛顿力学可以说是建立在前人研究成果的基础上。因此这里用例题 1 ～ 3 来说明伽里略和开普勒的研究结果与牛顿力学理论解结果的一致性，并以此作为力学的练习问题①。

[例题 1(A 级)]　用牛顿力学证明伽里略的的落体法则(1.3 节)。

解　取地球的重心为坐标原点如图 1.43 所示，取物体与原点的连线为 Z 轴。

根据牛顿的万有引力法则，物体承受的力如下式所示

$$F = -k\frac{mM}{z_0^2}$$

式中，m—— 物体的质量；

M—— 地球的质量(5.98×10^{27} grf·s^2/cm)；②

z_0—— 原点与物体间的距离；

k—— 比例常数(6.67×10^{-8} cm^4/grf·s^4；称为万有引力常数)；

R—— 地球的半径(6.370×10^{8} cm)。

由图可见

$$z_0 = R + h \approx R(h \ll R)$$

故有

$$F \approx -m\left(\frac{kM}{R^2}\right) = -mg$$

式中，g 是重力加速度

$$g = \frac{kM}{R^2} = \frac{6.67\times5.98\times10^{19}}{(6.370\times10^{8})^2} \approx 9.8\times10^{2} \quad (\mathrm{cm/s^2})$$

根据牛顿第二定律，有

$$F = m\ddot{z}(\approx -mg)$$

所以

$$\ddot{z} = -g$$

对 $\ddot{z} = -g$ 进行积分可得

$$\dot{z} = -gt + v_0$$

如果设落下时初速度为零，则有

$$\dot{z} = -gt$$

对上式再次积分，设 $t = 0$ 时 $z = z_0$(设 $v_0 = 0$) 则有

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$$

从以上结果可见，无论是下落速度($\dot{z}$)、还是下落距离($=-\frac{1}{2}gt^2$) 均与下落物体的质量 m(故也与下落物体的重量) 完全没有关系(在 $\ddot{z}$，$\dot{z}$，z 的式子中均不出现 m)。

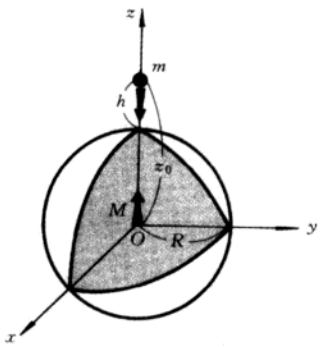


图 1.43　将坐标原点设在地球的中心(= 重心)，取 Z 轴通过因万有引力与地球相互吸引的物体。此时引力的大小为

$$F = \frac{-kMm}{(R+h)^2}$$

① 为了追索创建力学的伟大先驱者们的一步一步足迹，同时也为使读者对“力学与数学的密切关系”有一个笼统的了解，故将这第 1 章的例题写得很长。但若跳过不读也是没有关系的。而从第 2 章开始的例题具有与正文同等程度的重要性，对它们则必须在阅读过程中充分予以理解。

② 英制，1 gr = 0.064 8 g，1 grf 为 1 gr 质量的重力 —— 译者注。

[例题 2(B 级)] 开普勒在发现他的定律时(参照下一个例题 3),首先根据观察结果将火星与地球的会合周期(两个行星最接近后又离去到下次再次最接近所相隔的日数①)定为 780 日,由此来推定地球的轨道,然后再推定以火星为首的其它行星的轨道。他是如何推定地球轨道的?

解 本题不是力学问题而是单纯的算术问题,它作为人类摸索推断出行星及恒星运动的第一步而引起人们的兴趣。由于地球自身是运动着的,即使有从地球上观测到火星运行的记录,但是对火星关于太阳那样的静止坐标②又是如何运动的,仍然不清楚。因此,如果能得到火星从其轨道上的一点出发再回到同一点的周期(公转周期)T_m,则认为每隔 T_m 火星将出现在空间同一位置。地球的公转周期 T_r 为 365 日是众所周知的③,地球的平均转动速度 ω_r(1 日内前进角度的平均值)为

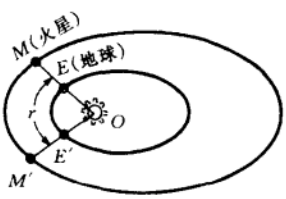


图 1.44 利用火星找出对太阳的不动点

$$\omega_r = \frac{360^\circ}{T_r} = \frac{360^\circ}{365}$$

此外,对火星为

$$\omega_m = \frac{360^\circ}{T_m}$$

如图 1.44 所示,设开始的会合点为 M 和 E,此后经过 780 日再次会合(最接近)的点为 M' 和 E'。设角 EOE' 为 γ,则有

$$\gamma = \frac{360^\circ}{365} \times 780 - 360^\circ \times 2 = \frac{360^\circ}{T_m} \times 780 - 360^\circ ④$$

求解上式可得:$T_m = 687$(日)。如前所述,火星的公转周期为 687 日,即每隔 687 日火星将位于同一位置,如果有在地球上对太阳与火星所形成的夹角的大量测定记录,则可推断地球的轨道(形状和大小)。若知道地球的轨道,则容易推断其它星的位置。

以下几件事对开普勒来说是幸运的:

(1) 由于地球的轨道近似于圆,因此可以比较容易地进行推断。

(2) 反之,火星的离心率 e 大($e = 0.09$)⑤,故行星的轨道是椭圆形的第一定律容易被发现。

(3) 由于观测的精度低,其它行星的影响可忽略。根据后来路贝里(1846 年)的计算发现了海王星一事,是因为考虑到天王星轨道不是标准的椭圆,故必然还有其它行星存在。

开普勒将他先生布拉依的观测结果作为开普勒定律整理了出来,这无疑是他自身的努力与卓见的结果,但同时也是他幸运地有了良师之故。

[例题 3(C 级)] 用牛顿第二定律及万有引力法则证明关于行星运动的开普勒定律。

解 本题是牛顿自己求解并让牛顿力学的正确性得到世界承认的有名的问题。多少有些难度,希望将本题作为向量运算、微分方程和坐标变换的练习来阅读。此外若跳过不读也不要紧。

开普勒定律由下列三点构成:

(1) 所有的行星在以太阳为焦点之一的"椭圆"上运动(第一定律)。

(2) 行星与太阳的连线在一定的时间内所扫过的面积也是一定的(第二定律)。

(3) 行星的公转周期的平方与该行星的轨道椭圆长半径的立方成正比(第三定律)。

① 假定太阳、地球、火星在会合点处位于一直线上求解。

② 在计算行星轨道时,实际上忽略了太阳的运动。

③ 公转周期是指行星绕轨道一周所需要的时间(日数)。

④ 在已知火星公转周期比地球长的条件下所建立的公式。

⑤ 参照例题 3 的式(f)。

表 1.1　第三定律(r^3 与 T^2 的比较)

	火星	金星	地球	水星	木星	土星
r	0.39	0.72	1	1.52	5.2	9.6
r^3	0.059	0.37	1	3.51	140	884
T	0.24	0.62	1	1.88	11.9	29.6
T^2	0.058	0.38	1	3.53	141	876

以上数据均是与地球的比值

开普勒仅根据行星的观测记录就得出这些定理是相当了不起的(图 1.45)。实际上由于行星之间的引力影响,如例题 2 所指出的那样,开普勒定律严格地说是不成立的。但是幸运的是,根据当时的观测精度对这一点并不了解,相反它反而将幸运带给了牛顿。牛顿也与开普勒一样是一个幸运的人。

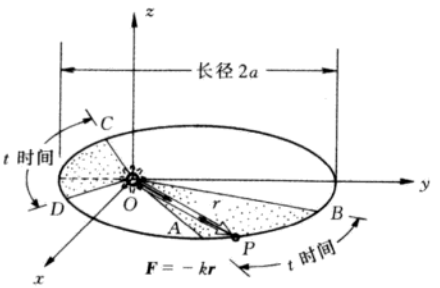


图 1.45　太阳对行星的万有引力沿行星与太阳的连线作用(将太阳作为坐标原点)

1. 用向量来证明第二定律

首先用牛顿的第二定律来证明开普勒的第二定律。(利用向量证明开普勒的第二定律是最简明的)

取太阳为坐标原点,太阳作用在行星 P 上的力 $\boldsymbol{F}$ 位于太阳与行星的连线上,为 $\boldsymbol{F}=-c\boldsymbol{r}$。式中,$c$ 为系数(标量),$\boldsymbol{r}$ 为表示 P 位置的向量(图1.45)。根据牛顿第二定律,有

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F},\quad m\ddot{\boldsymbol{r}}=-c\boldsymbol{r} \tag{a}$$

在式(a)的两边乘 $\boldsymbol{r}$ 并取向量积,有关系

$$\boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times(-c\boldsymbol{r})=-c(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r})=0 \tag{b}$$①

而 $\boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}$ 可写成 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}})$,这是由于有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}\times m\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}\ ^{*}\ ②$$

的关系成立。因此式(b)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}})=0$$

将此结果对 t 积分,可得

$$\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}=\text{const}(\text{常数})=A \tag{c}$$

式(c)就是开普勒第二定律。但是我想,至此仍然会有不少读者不理解,故利用图 1.46 再作一些说明。

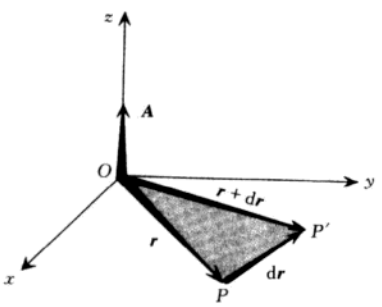


图 1.46　用向量运算来说明开普勒第二定律

设位于 P 点的行星在 $\mathrm{d}t$ 时间后移动到 P' 点。设 $\overrightarrow{PP'}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,则 $\overrightarrow{OP'}$ 为 $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。当 $\mathrm{d}t$ 取得很小时,行星的速度为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$,可写为 $\dot{\boldsymbol{r}}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$。而三角形 OPP' 面积可写成

$$\Delta A=\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})\right|=\frac{\mathrm{d}t}{2}\left|\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}t}{2}\,|\,\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\,|=\frac{\mathrm{d}t}{2m}\,|\,\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}\,|=\frac{\mathrm{d}t}{2m}\,|\,\boldsymbol{A}\,|$$

① $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}|^2\sin\theta=0$(因为 $\theta=0$)。同时有 $\dot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,$\ddot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$。

② 一般,$f(x)$ 与 $g(x)$ 之积 $f(x)\cdot g(x)$ 的微分为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x))=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}g(x)+\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}f(x)$。该式对两个向量的乘积($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$)也成立。

故当 dt 为某一定值时 ΔA 为一定，即在一定的时间内扫过的面积为一定值，这可由式(c)来证明。式(c)还表示了行星在同一平面内运动。如图 1.46 所示，将 P，P' 点取在 $x-y$ 平面上，则 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$，$\overrightarrow{PP'}=d\boldsymbol{r}$ 的两个向量均在平面内，其向量积与 z 轴一致，即式(c)不仅表示了两个向量积的大小 $|\boldsymbol{A}|$，还表示了它的方向也是一定的。这就表示，P 点永远在平面 $x-y$ 内，即行星的轨迹是一平面图形。

除第二定律的证明以外，其它定律的证明则不使用向量运算来证明更容易理解。(由于第二定律已经证明，对证明中所使用的向量运算可看成是一种练习。开普勒第一、三定律尚未证明，下面的证明将不再使用向量)

2. 椭圆的方程式

在第一定律"轨道为椭圆形"的证明中，首先必须了解椭圆公式。众所周知的椭圆公式为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{d}$$

式中，a，b 如图 1.47 所示为椭圆半轴。另一方面，椭圆原来的定义为："到两点 O_1，O_2 之间的距离之和为常数的点轨迹"，利用两点 O_1，O_2 之间的距离为 $2f$，由 P 到达 X 点和 Y 点距离之和相等的条件，可得

$$2\sqrt{b^2+f^2}=(a+f)+(a-f)$$

$$f^2=a^2-b^2 \tag{e}$$

椭圆的离心率定义为

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \tag{f}$$

(若 $e=0$ 为圆；$0<e<1$ 为椭圆；$e=1$ 为抛物线；$e>1$ 为双曲线。)

根据式(e)和式(f)可得

$$f=ae \tag{g}$$

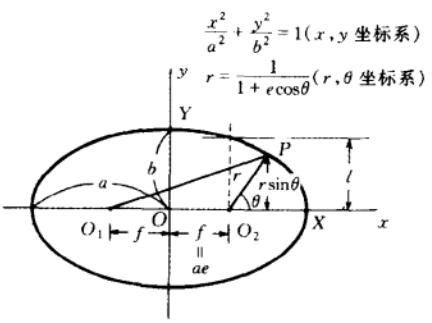


图 1.47 椭圆的公式：可用 $x-y$ 坐标系(正交坐标系)表示，也可用 $r-\theta$ 坐标系(极坐标系)表示

根据图 1.47，若 $x=f$ 则 $y=l$，将它们代入式(d)并利用式(f)，可得

$$\frac{1}{a^2}=\frac{(1-e^2)^2}{l^2} \tag{h}$$

另一方面，由图 1.47 所得的关系 $x=ae+r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 代入式(d)，可得

$$\frac{(ae+r\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1 \tag{i}$$

利用式(f)和式(h)消去式(i)中的 a，b，可得

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta} \tag{j}$$

在上述冗长的说明中，主要是讲述了：椭圆公式若用 $x-y$ 坐标表示为式(d)，而用 $r-\theta$ 坐标(极坐标)表示为式(j)。

3. 极坐标运动方程式(牛顿第二定律)

图 1.45 中 P 的位置可用 x，y 表示也可用 r，θ 表示。用 x，y 表示的是正交坐标系，而用 r，θ 表示的是极坐标系。当然在 (x,y) 与 (r,θ) 之间存在一定的关系。由图 1.48 有

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \tag{k}$$

所以

$$y/x=\tan\theta$$

反之，对 r，θ 求解，有

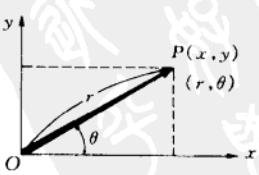


图 1.48 正交坐标系 (x,y) 与极坐标系 (r,θ) 的关系

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{l}$$

考察在 $x-y$ 平面上以速度 v 运动的质点，x，y 分量为 v_x，v_y，由图 1.49 有

$$\begin{cases} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha \end{cases} \tag{m}$$

同时，在与 x，y 轴形成夹角为 θ 的另一个正交坐标系 ξ，η 中的分量为

$$\begin{aligned} v_\xi &= v\cos(\alpha-\theta) = v(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \\ v_\eta &= v\sin(\alpha-\theta) = v(\sin\alpha\cos\theta - \sin\alpha\cos\alpha) = v_y\cos\theta - v_x\sin\theta \end{aligned} \tag{n}$$

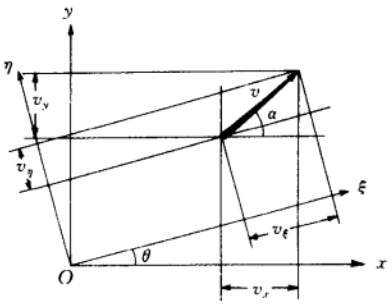


图 1.49 正交坐标系 (x,y) 与极坐标系 (r,θ) 之间的向量 v 的变换

上式为两个正交坐标系 $x-y$ 和 $\xi-\eta$ 之间的坐标变换公式，用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \tag{o}$$

式中

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{p}$$

反之，若用 v_x，v_y 来表示

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{bmatrix} \tag{q}$$

上述矩阵表达形式是十分方便的。在结构力学中，最重要的矩阵运算有：① 矩阵积；② 逆矩阵；③ 矩阵的固有值。为便于不熟悉矩阵的读者，在附录中有简要的说明。

如式(p)中的 $\boldsymbol{T}$ 那样，有关系 $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 成立的矩阵称为正交矩阵。

回到原来的问题，v 的 x，y 分量为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$$

用极坐标表示并利用微分公式，有

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\theta) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta + r\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\sin\theta) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta + r\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \tag{r}$$

用 r 方向和与之垂直方向的两个分量来表达时，利用坐标变换公式，式(o)可写成

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

用非矩阵的形式来表示，为

$$\begin{aligned} v_r &= v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \\ v_\theta &= -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \end{aligned}$$

利用式(r)改写为

$$\begin{cases} v_r = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\cos\theta + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\sin\theta = \dot{r} \\ v_\theta = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)(-\sin\theta) + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\cos\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \tag{s}$$

实际上，式(s)不必进行上述麻烦的计算而由图 1.50 直接得到。考察 P 点在 $\mathrm{d}t$ 时间内移动了 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 到达 P' 的情况，有 $\overrightarrow{OP'} = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$。从 P 对 OP' 引垂线 PQ，有 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，故有

$$\overrightarrow{PQ}/\mathrm{d}t + \overrightarrow{QP'}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}$$

因为 r 方向速度变化为 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \dot{r}$，$\theta$ 方向速度为 $PQ = r\mathrm{d}\theta$，可得

$$r(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t) = r\dot{\theta}$$

为求得 r 方向，θ 方向的加速度分量与速度同样地也可有两种考虑方法，但利用第一种方法不易出错。将 $a_r = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \ddot{x} - \dfrac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}$，$a_y = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y} = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$，代入式(r)，可得

$$a_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_r = \dot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}\sin\theta - r(\dot{\theta})^2\cos\theta$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y = \dot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}\cos\theta - r(\dot{\theta})^2\sin\theta$$

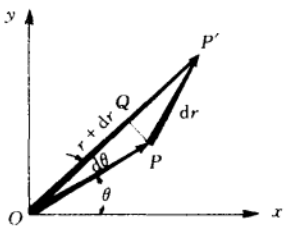
利用式(n)或式(o)进行坐标变换，可得

$$\begin{cases} a_r = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) \end{cases} \tag{t}$$

该式为极坐标表示的加速度分量。因此牛顿第二定律(运动方程式)的极坐标表达式为

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta}^2 + r\ddot{\theta}) = F_\theta$$



$v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}$(长度的变化)

$v_\theta = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\dot{\theta}$(方向的变化)

图 1.50 向量的微分(可由图直接求出)

4. 行星的运动

设太阳与行星之间仅相互作用有万有引力，即

$$F_r = -\frac{km_pM_s}{r^2}$$

$$F_\theta = 0$$

式中，m_p —— 行星的质量；

M_s —— 太阳的质量；

r —— 行星与太阳的距离。

行星的运动方程式为

$$m_p(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{km_pM_s}{r^2} \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{kM_s}{r^2} \tag{u-1}$$

$$m_p(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{m_p}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \mathrm{const}(\text{常数}) = h \quad \text{所以} \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \tag{u-2}$$

式(u-2)中 $r\times r\dot{\theta}(r^2\dot{\theta})$ 为常数是表示：当取同样时间 t 时，图 1.45 所示的打点部分面积相等，即其扫过的面积相等(开普勒第二定律)。其次，利用关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \qquad (\text{参照式(u-2)})$$

和式(u-2)，将式(u-1)改变为

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r\right) - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = -\frac{kM_s}{r^2}$$

$$\frac{h}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{h}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{h^2}{r^4} = -\frac{kM_s}{r^2}$$

$$\frac{h^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{h^2}{r^2}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{kM_s}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{1}{r} = -\frac{kM_s}{h^2}$$

其中 $1/r = U$，可将上式改写为

$$U^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{U}\right) = U^2 \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\left(\frac{1}{U}\right) = U^2 \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}(-1)\frac{1}{U^2} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2} + U = \frac{kM_s}{h^2} \tag{v-1}$$

式(v-1)为振动、屈曲问题中经常出现的公式，其解为

$$U = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{kM_s}{h^2} \tag{v-2}$$

式中 A，B 需根据运动开始时的位置与速度，即初始条件来确定。由于行星的初始位置与速度不清楚，故按符合当前观测值和使公式简化的条件来确定。例如，取行星与太阳最接近点(近日点)的坐标为基准，即 $\theta = 0$，可确定 $B = 0$(求满足 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\theta = 0$ 的 U 最大值，也即 r 的最小值，并将 $\theta = 0$ 代入 $0 = -A\sin\theta + B\cos\theta$，可得 $B = 0$。同时，由于 U 的最大值已求得，$\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}\theta^2 (< 0) = -A\cos\theta$，故有 $A > 0$)。由此可将式(v-2)改写为

$$\frac{1}{r}(= U) = A\cos\theta + \frac{kM_s}{h^2} \tag{v-3}$$

上式就是式(j)所得到的"椭圆公式"，即设

$$\frac{h^2}{kM_s} = l, \quad \frac{h^2A}{kM_s} = Al = e \tag{w}$$

有

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

由于 $l > 0$，$Al > 0$，故 $e > 0$。由此尚得不出 $1 > e$ 的椭圆条件，有可能 $e \geqslant 1$(抛物线或双曲线)，然而行星是不可能远离太阳而去的，故可能的轨道只有椭圆，即必须有 $1 > e$ 的条件成立。这样就证明了开普勒第一定律。

剩下的只有开普勒第三定律，它可利用第二定律作简单的证明。

椭圆的面积为 $S = \pi ab$。另一方面，由于单位时间(= 1 s)内扫过的面积为 $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$，故参照式(u-2)，行星周期为

$$T_p = \pi ab \Big/ \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = 2\pi ab/h \tag{x}$$

由式(h)及式(f)，可得

$$a = l/(1-e^2), \quad b = l/(1-e^2)^{1/2}$$

根据式(w)，可得

$$h = \sqrt{kM_s l}$$

将之代入式(x)，可得开普勒第三定律

$$T_p = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{kM_s}$$

所以

$$T_p^2 = (4\pi^2/kM_s)a^3$$

通过例题 1 ～ 3，说明只需根据 4 个牛顿的力学定律(其中数学公式仅为第二定律与万有引力法则)便可完全证明伽里略落体法则和开普勒行星运行法则。同时也说明了数学的基础知识——微分、积分，向量运算、矩阵运算、坐标变换等等，这是求解力学问题强有力的工具。

若读者对例题 1 ～ 3 尚不完全理解也不要紧，通过下面几章的学习，也一定会逐渐明了。



第 1 章的总结：

1. 力的作用表现为两个方面，各有其基本定律。

① 力使物体变形。虎克定律($F = ku$)

② 力改变物体的运动状态。牛顿第二定律($F = ma$)

2. 力矩定义为力与力臂之积 $\boldsymbol{F} \times l$,通过它可将小的力变换成大的力(力学的机械原理)。

3. 可将力(正确地说应是功)作为能量储藏在物体内部(如弓等)。

4. 力学和结构力学在长时期的发展中被抽象化,可由数学公式来表示。数学的某些领域是随着力学的发展而发展。

5. 复习了力学和结构力学使用的数学:"微分、积分"和"向量"的要点[①]。



第 1 章练习题

1.1 从古至今一直不变地使用的力学工具之一是绞车。如图 1.51 所示,需在半径为 R 外圆的绳子上作用多大的力(P)才能与绕在半径为 r 内圆的绳子上 p 力相抵消?此外,此时 p 与 P 所作的功之间有什么关系?(A 级)

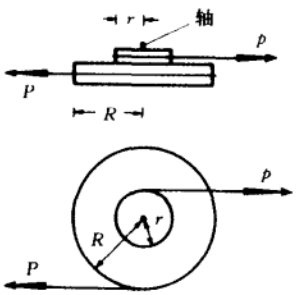


图 1.51

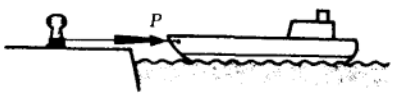


图 1.52

1.2 "电磁式上浮高速列车由于在行驶时上浮不与地面接触,故它与飞机一样对地面无作用力且无振动问题"的说法正确吗?(A 级)

1.3 用缆绳绕在锚桩上便可将船栓住,用力学知识对之作出说明。(B 级)(图 1.52)

1.4 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的曲率。(A 级,不过对初次接触本问题的读者为 B 级,由于本问题与第 4 章梁弯曲的基本公式有直接的关系,故请参考答案)(图 1.53)

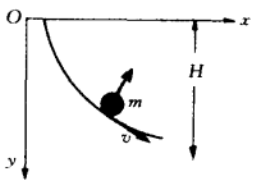


图 1.53

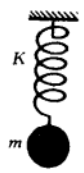


图 1.54

1.5 质量为 m 的重物挂在刚度为 K 的弹簧下,写出该系统的运动方程。(B 级)(图 1.54)

① 除此之外若还能理解偏微分和矩阵,则对当前结构力学中使用的数学就足够了。

2 结构设计和结构力学

第 2 章的内容：必须对建筑物进行安全设计。所谓安全设计是指什么？为进行安全设计需如何应用结构力学？一时难以回答这些问题也不要紧，只要通过本章的学习便能理解。

建筑物是人类生活的空间，即人类在生活时所必需的、为实现某种目的而形成的空间。因此在设计建筑物所制定的规划中最重要的是：建筑物所形成的空间需适应一定的要求，同时，在该要求持续的时期内，即在建筑物的使用期内（**使用年限**内）[①]，保持该空间的“安全”且保证使用者不受到危害也是同样重要的。

说到“安全”问题，其内容包括了化学问题（例如火灾时的有毒气体）、物理问题（例如火灾时的热、地震时的力）等等，形态各异。其中处理关于**力的安全性**问题，并将之具体实现的被称为**结构规划**或**结构设计**[②]，而它们的理论基础则是**结构力学**（图 2.1）。

建筑物建造好后，作用有以重力为首的各种力。将作用在建筑物上的力称为**荷载**或**外力**。对力的两个作用，即**运动**和**变形**，由于建筑物是由**地基**所支承的，故其中的“运动”作用是极有限的，它不会像被击的球那样发生很大的移动[③]。如图 2.2 所示，作用在建筑物上的荷载、外力通过建筑物最终传到地基，由地基产生抵抗该力的反作用力也作用在建筑物上，建筑物上的外力保持平衡。将“由支承物体（这里是地基）抵抗荷载、外力而作用在建筑物上的力”称为**反力**。将建筑物作为承受力的一个物体看待时（此时称之为**建筑结构物**或**结构物**比称之为建筑物更

① 使用年限的意思是指：“为尽可能长期地使用建筑物，由各种条件所限定的建筑物使用期限的界限”。近年来，使用年限不仅取决于承载力或材料的老化（随着时间的长久所产生的风化及其它形式所表现出来的物性变化），而且由于社会的变化所决定的使用年限有显著的缩短。例如，各种设备不完全的旧建筑，尽管有些不方便但还可勉强使用的，但却由于无人租用故往往对之进行改建。

② 结构规划是对结构作概要的处理时使用的词汇。结构规划确定了一个建筑物结构的基本处理方法，按照结构规划的框架进行具体的结构设计。

③ 在地震作用下，建筑物和支承的地基均会摇晃，这是运动也有移动，但仍是限定在一定范围内的振动。当静止地施加力时（例如雪堆积到建筑物上）是不产生上述运动的（将前者称为**动荷载**，后者称为**静荷载**）。

恰当)[①],反力也看作是作用在物体上的力,物体上的荷载、外力和反力在总体上保持平衡[②]。

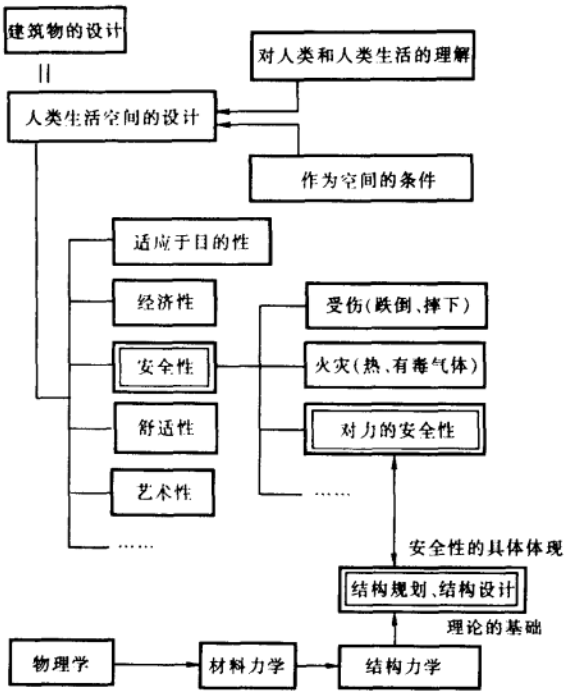


图 2.1 建筑物的设计与结构力学的关系。"建筑物的安全"是建筑物设计中的重要条件。结构力学则是作为"建筑物的安全"设计的理论依据

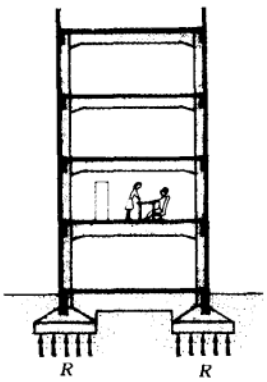


图 2.2 作用在建筑物上的力,无论是何种力最终都传到地基上,由地基产生抵抗该力的反作用力(反力 R)作用在建筑物上,建筑物处于外力平衡状态

建筑结构受荷载作用时,由于地基反力使结构不产生移动,此时力的另一个作用"使物体产生变形的作用"当然得以充分发挥,建筑物发生变形。在学习结构力学时首先必须理解的是:**在力的作用下结构必然变形**。为什么结构受外力作用时会产生变形?如果理解了这一点,可以说已了解了结构力学的 1/3。



2.1 结构设计的内容

理解一个事物极其有效的方法是做实验。由于进行一个正确的实验需要充分的准备和设备,一个聪明的做法是可先通过简单的实验来进行类推。首先对简单的"物体"施加力来取代"建筑物"的加力过程。由于考虑的是变形问题,选取容易变形的柔软的物体比坚固的物体更

① 当将建筑物看成是力学的对象,即看成是抵抗力或传递力的物体时,就不再考虑建筑物的美观和设备的方便等功能,而是简单作为结构物来处理。

② 对建筑物而言,反力也是外力(即从外部施加的力)的一种。在下文中当容易引起混淆时,将反力以外的外力称为荷载。

好，因此可选取身边常用的橡皮。

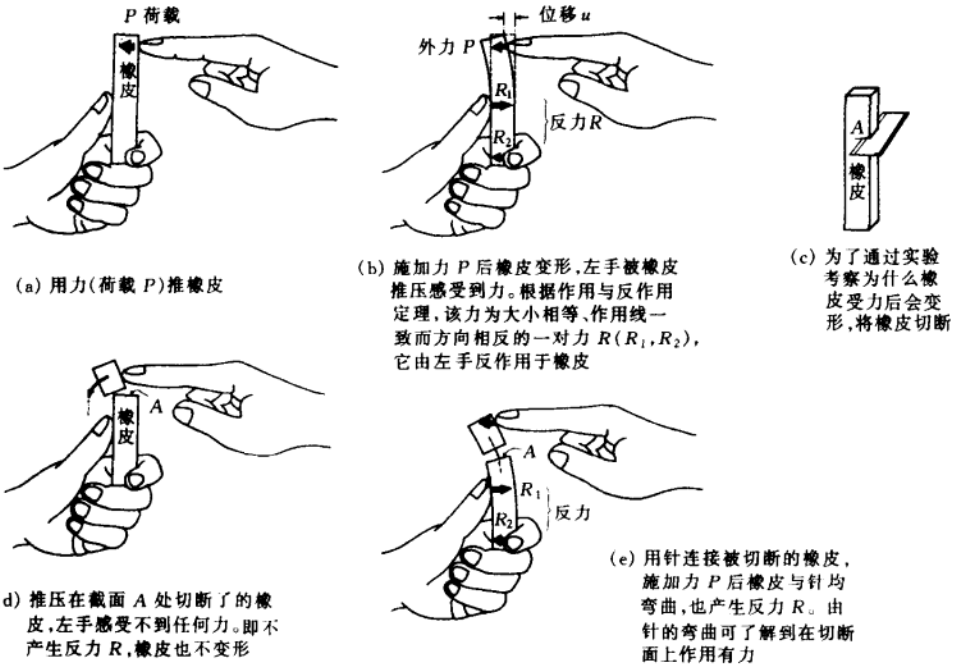


图 2.3　利用橡皮所作的实验

[实验 A]　将橡皮如图 2.3(a)所示用左手拿住，用右手推。即作如下的置换：建筑物→橡皮，地基→左手，荷载→右手推力，也可称为一种模型。橡皮在右手推力下产生变形。左手指受到来自橡皮的力作用，此时请回忆一下作用和反作用定理，可认为左手指也如图所示对橡皮施加一对力，这就是反力(R)。当加大右手的力 P 时，左手指对橡皮的推力也加大。这样，反力 R 由荷载 P 所决定，即**反力是荷载的函数**。

然后观察作为建筑物模型的橡皮变形。由于加大右手的荷载，变形(u)也加大。所以**变形也是荷载的函数**[①]。上述现象并非新的事物，它是不需通过实验、任何人都知道的一般常识(图 2.3(b))。

[实验 B]　为了达到实验的目的，即"为什么受荷载、外力作用的结构会变形"，将橡皮如图 2.3(c)所示切断后再照原样放好并施加荷载。这样橡皮的上部将掉下而其下部既无反力也无变形(图 2.3(d))。

[实验 C]　将切断面用粗针连接并施加荷载，则橡皮和针均产生变形和反力[②]。

将上述实验结果整理并加以考察后可得以下结论。

(1) 当物体被切断后不可能传递力。因此在[实验 B]中，下部的橡皮既无反力也无变形。

① 反力或变形不仅与荷载有关，而且与物体及其支承物的特性有关。

② 在图 2.3(e)中若用细针连接，在施加荷载时，在左手感到大的压力以前针的变形会先逐渐加大。可以说这表示了由于结构构件过细在承受荷载时发生破坏的建筑物的模型。这种由于针很细而达到的极限状态也表示了橡皮被切断后上下分离的状态。

(2) 看来力是通过物体截面进行传递的。在[实验 C] 中针产生了变形，为了使针变形必须施加力这一点只能认为力是通过截面相互作用的。

(3) 对物体施加荷载、外力后，只要物体是连续的，则在物体内部产生相应的力并传递力，由于该力的存在而使物体变形[①]。将这种外力在物体内部产生的力称为**内力**。由于内力在物体内产生的变形称为**形变**。如[实验 B、C] 所示，将物体切断后进行考察可确认截面上内力的存在，故也称为**截面力**，其意义与内力相同。当外力加大时内力(截面力) 也加大，这可从[实验 C] 中针的变形随着荷载加大而增加看出。

(4) 内力或反力均随着荷载的加大而加大。荷载与反力相互平衡，即作用在建筑物上的外力之间有力的平衡关系。由此可推测，在反力与内力之间一定也有某种平衡关系存在。同时，在内力与变形之间也有密切的关系存在[②]。

通过上述实验，已对"什么是结构设计" 有所了解。将实验结果归纳如下：

1. 结构受力作用；
2. 结构内产生内力、变形；
3. 结构的支承部分产生反力；
4. 当外力加大时，内力、变形、反力也加大；
5. 当结构破坏时(橡皮切断时或用细针连接时等)，结构已不能抵抗外力或不能保持其形状。

将上述内容与结构设计内容相联系，有[③]：

1. 调查作用在建筑物上的荷载、外力；
2. 计算当上述荷载作用在建筑结构上时产生的支承反力、结构中产生的变形与内力；
3. 检验支承部分(地基、基础) 和结构的变形或内力是否过大；
4. 检验支承部分和结构是否会破坏。

由此可推测，结构设计就是通过上述检验来确认结构是否安全。此时必须有一个无论是谁进行检验均可判断出危险与否或安全与否的**客观依据**，而**结构力学就是其理论基础**[④]。

在结构设计中，尚有比上述 1 ～ 4 更重要的事项。在 1 ～ 4 中认为建筑结构是已知的，但结构设计原来的目的就是要确定结构。即结构设计中包括两部分：

(1) 确定结构(结构的形状、构成结构的柱、梁及其它的材料和尺寸)；

(2) 确认结构的安全性。

其中任一部分均需结构力学知识，在**确定结构**中，由于需要作出对建筑设计的适应性和结构所需费用等方面的综合判断，该过程也取决于经验[⑤]。与此相比，在**确认安全性**中，尽管也需要确定荷载、外力或建立结构模型方面的经验，但用数学公式来表示的部分较多。因此，实际上往往

① 在 3.2 节中"由于变形的产生而产生了内力" 的说法更正确。

② 再次强调，上述(1) ～ (4) 的结论是十分重要的。在现阶段，请认真地思考并予以理解。

③ 根据内力是否过大来检验安全性的方法称为**容许应力设计法**。根据结构破坏的可能性来检验安全性的方法称为**极限强度设计法、极限状态设计法**等。一般在使用极限强度设计法时所取用的荷载、外力比容许应力设计法大。

④ 若有人问，是否只要知道结构力学就会进行结构设计呢？回答只能是：这是不够的。还必须知道构成结构的材料的特性和进行施工的方法等。反之若有人问，是否不懂结构力学也可进行结构设计呢？回答是明确的：不可能。

⑤ 近年来，由于计算机信息检索方法的发展和系统工程方法的飞速进步，过去需丰富的经验和知识的积累才能完成确定结构的工作，今天也可由年轻人借助计算机来完成。所谓系统工程是指为达到一个目标而综合诸多因素的"综合的工程"，建筑等领域是典型的系统工程。

是在有经验的人的指导下利用计算机完成包括绘制结构图在内的工作。

当然，(1) 和(2) 是相互关联的，当由(2) 得出危险的结论或过于安全会产生浪费的结论时，当然需由(1) 进行修正后再重复(2) 的工作。本书对(1) 的内容将在进一步学习结构力学之后再展开，这里首先对(2) 中确认安全性的事项逐一叙述。



2.2 作用在结构上的力

将作用在建筑物上的力称为**荷载**、**外力**。有人将建筑物的自重(固定荷载)、建筑物上的负荷(人、物等) 重量(堆积荷载)、屋顶上的积雪荷载(雪荷载) 等沿垂直方向、即重力方向作用的力称为**荷载**；另一方面将风产生的力(风压)、地震产生的力(地震力)、水或土产生的力(水压和土压) 等垂直方向以外的作用力称为**外力**，但一般不作如此严格的区分[①]。由温度变化而产生的结构膨胀、收缩等变形当受到约束时，在构件中会产生内力(热应力)，它也是颇具特色的，但仍作为一种荷载、外力来处理(图 2.4)。其它根据需要应考虑的还有诸如直升飞机的启动和降落时或起重机行驶时产生的冲击力和机械运转而产生的振动等。

要推断在建筑物的使用期间有什么样的荷载、外力作用，建筑物将受到怎样的影响，是极其困难的。例如考虑如何设计使用期为 80 年的建筑物。当该建筑物的建造地区可能发生大地震而产生振动时，此时不容易确定该地震是 50 年一遇的地震，还是 5 000 年一遇的强烈地震。因此，只能对发生可能性高的现象考虑采取充分的对策，而对可能性极低的现象的对策不可能是周全的。即需通过引入概率理论来确定与使用年限相适应的、大小适当的设计地震力，并承担某种程度的风险(例如 5 000 年一遇的地震偶然在今后 80 年内发生，建筑物会受到相当程度破坏的风险)。

某种程度的风险是指什么样的程度，这不是仅由建筑工程师所能决定的问题，而是由社会来决定的问题。例如，为了建造抗震良好的医院，即除了需保证在地震时的安全，并在地震后能立即发挥功能外，还必须考虑在地震后的几天内储备有水、电、药品及食物等并能自给，此时所需的建设费用为建造同规模医院的两倍以上。对经济发达的国家而言，考虑到必须要求医院在地震后能最快地处置病员等，花费两倍的建设费用是值得的。但是对医院较少且国民的死亡率高的发展中国家，与其建造一所考虑抗震的医院不如建造两所普通的医院，这样可在平时救助病人时发挥更大的作用。当然也存在地震时由于医院的倒塌而造成住院患者及医生和职员死亡的危险，但这种危险对医院而言是无可奈何的(同时，若两所医院建造在互相远离的地区，同时遭遇地震的可能性极小)。

这样，由于始终存在着如下的问题：对社会而言，要保证建筑物安全需花费多少费用才最合适[②]？所以确定设计荷载、外力的大小是极其困难的工作。当然在研究设计荷载时还需考虑到建筑物的用途、规模及它对灾害后果的影响等。

① 荷载是 load 的译文，外力是 force 的译文。例如对风可使用 wind load，wind force，wind pressure 等，对 load 与 force 不作明确的区别。

② 所谓"最合适"，是指对"用于安全的费用"中所占比例高的"抢救人命数量"部分的投资。社会中存在着自然选择的机制：当某事项(例如交通事故) 的死亡数增高后，则对此所采取的对策也会优先于其它事项。

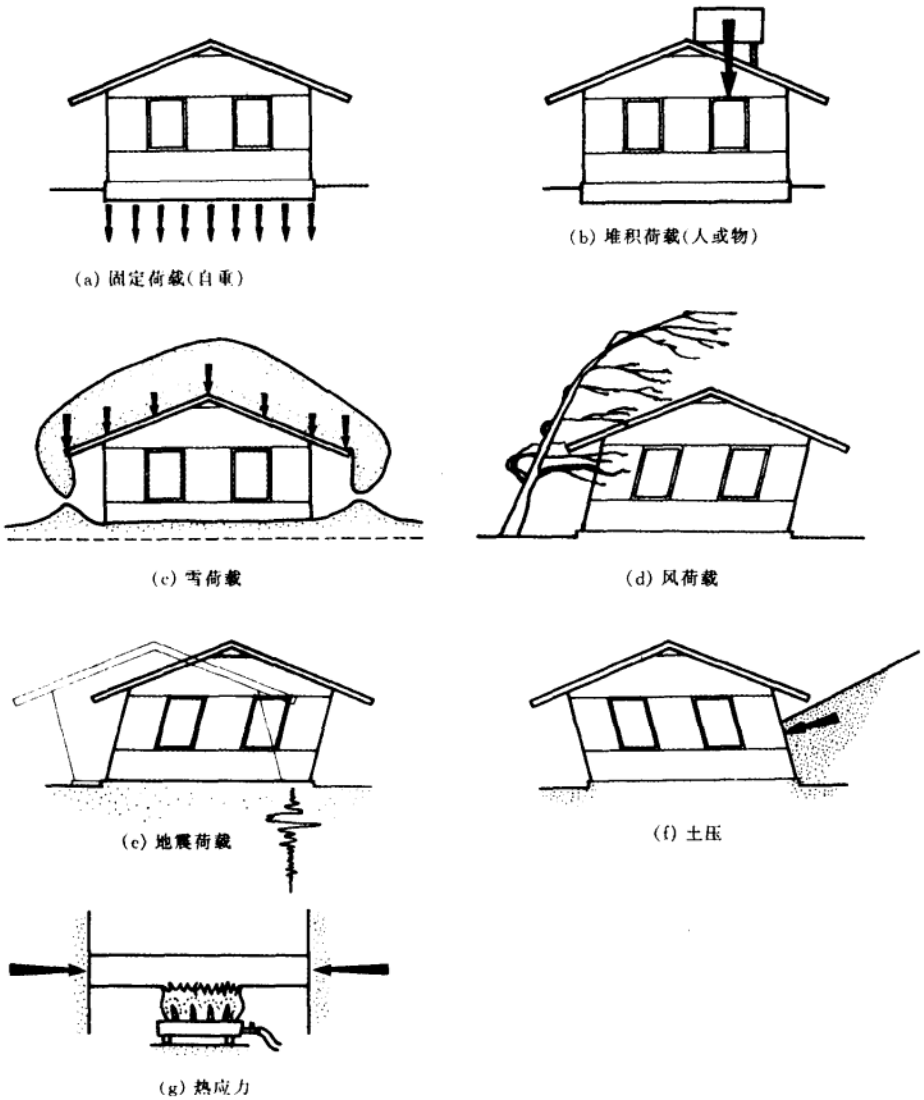


图 2.4 加在建筑物上的种种荷载

困难的不仅是荷载的大小。仍以地震力为例进行考虑，该力是作为垂直、水平及旋转的组合作用在建筑物上，力的性质随着时间的变化而变化，而且每次地震其性质均不相同(图 2.5)。

那么对复杂的荷载、外力，究竟应如何选用来进行建筑物的设计?结论是：对荷载建立模型并置换成简单的力。一般来说，模型的简化程度越高，则它与现实相差越远①。因此，模型有粗、有细，对同样的荷载、外力随着分析精度的不同其模型化的方法也不同，即模型的精度不同。例如，对设计地震力，有简单地作为水平作用的静荷载(图 2.6) 和作为随时间变化的、水平与垂

① 能建立简单又可反映实际现象模型的人才是优秀的工程师。

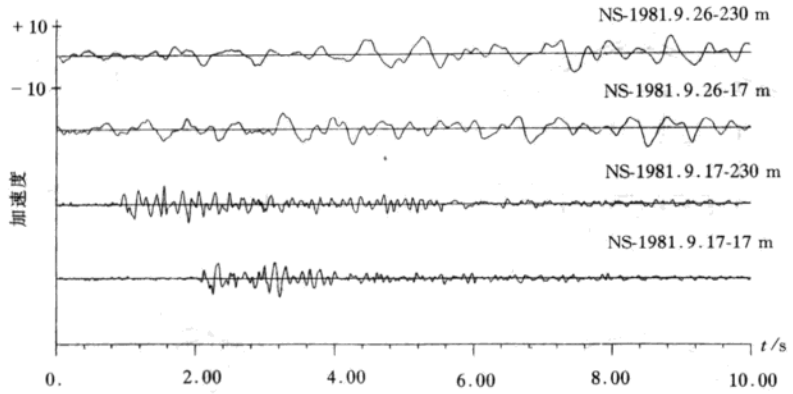


图 2.5　同一地点记录到的地震波其性质却完全不同，这在实践中并不罕见（仙台市东北大学片平校区的记录）

直组合的动荷载。对地上高度超过 60 m 的超高层建筑，其设计用的地震力取随时间变化的动荷载并分析建筑物对此产生怎样的摇动，将之称为**动态分析法**。

在一般建筑物的设计中，设计人员不可能对每一个建筑均实行“考虑社会的状况确定荷载、外力的大小，建立模型”。因此在现实中是直接在法令、条令、通知和规范、指针[①]中规定的、用简单的模型来表达荷载值。但作为将来的发展趋势应是：由设计人员自己利用储存在计算机中的庞大数据，根据自己的判断和责任来确定设计荷载，即在荷载的取法上也将反映出设计人员技术水平的差异。目前，对特别重要的建筑物或对破坏后造成重大影响的结构[②]，除了在规范中规定的设计荷载、外力值之外，尚需利用现阶段可能的方法来推定荷载、外力值并取超过规范的值来进行设计，所以它们的安全程度高于一般的建筑物。这样，建筑物的重要性对确定设计荷

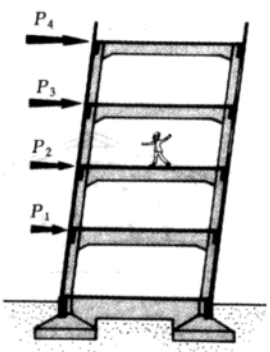


图 2.6　地震时由于地面振动引起建筑物振动的现象也可用对地面上不动的建筑物施加水平荷载 P_1，P_2… 的模型来表示。此时的 P_1，P_2… 为静设计荷载

① 这里的法令是指建筑法及执行令。条令、通知是指由建设负责官员发出的行政命令，设计人员必须在不违反它的前提下进行设计。其他尚有地方性的内部规定。另一方面，由日本建筑学会或日本建筑中心所制定的规范和指针不具备法的约束力，但由于它们表明了详细的设计方法，故一般是按照它们来进行设计的。

② 特别重要的建筑物包括了以下的含义：

1. 灾害时不可缺少的机构使用的建筑物 —— 与广播、通讯，行政、警察，医疗、消防、急救，防灾据点，水道、煤气、电气等生命线有关（包括发电厂、处理站等）；
2. 灾害时收容避难者的建筑物 —— 医院、托儿所、幼儿园、小学、老人之家等；
3. 收藏了国宝、重要文化遗产及其它文化遗产的建筑物和建筑物本身 —— 美术馆、博物馆等；
4. 保持和发展国家文化、科学水平所不可缺少的机构、设施的建筑物 —— 研究机关、大学等。

破坏时影响大的建筑物是指：

1. 对周围造成大影响的建筑物 —— 核发电站，石油库，石油集装箱，处理有毒物、爆炸物、燃料工厂，监狱，动物园等；
2. 由于破坏会造成大量伤亡的建筑物 —— 高层建筑、会议厅、会堂、剧场等。

载有很大的影响。

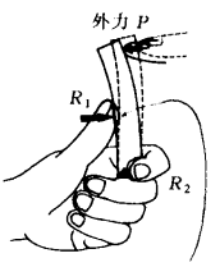
对地震荷载而言，随着地震科学的发展可根据地壳内应变能的积蓄程度等来推定某种程度的地震可能发生的区域和规模以及地震波特性等。因此可以认为，今后在确定地震荷载时，需将地震学所能预测的确定性特性与需用概率来表示的不确定性特性相结合。



2.3 反力与作用在结构上外力的平衡

由于建筑物是由地基所支承，所以在荷载作用下不会产生大的移动。考虑建筑物在荷载作用下处于静止状态，建筑物的加速度 $\boldsymbol{a}$ 为**0**，故牛顿第二定理：$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{F}$——外力，$m$——结构质量，$\boldsymbol{a}$——结构加速度）中的右边为**0**，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，“就**运动**而言”这种状态与结构上没有外力作用是相同的（注意，关于结构的**变形**，有外力作用与没有外力作用是完全不同的）。这样，当结构在外力作用下保持静止时，包括了反力在内的外力之间[①]有**力的平衡**关系，外力的合力为**0**，即 $\sum \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}$。

当结构受外力作用时，支承地基对结构产生与外力平衡的反力。为了研究为什么会产生如此“恰好的反力”，再试做一次图 2.3 所示的实验，仔细观察产生反力的左手手指，当加大外力时，手指被橡皮推压会产生大的倾斜（图 2.7）。当结构受到的外力越大，则地基相应产生大的形变和反力。当外力的方向变化时，地基的形变也相应变化，结果反力也变化，总是与建筑物其它外力保持平衡。



当外力 P 加大时，支承部分的应变也随之加大，结果反力 R_1，R_2 也加大

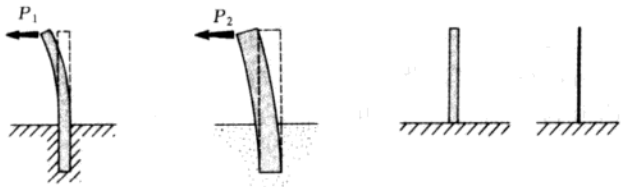
图 2.7 表示建筑物（橡皮）与支承地基（手指）之间的外力与反力关系模型

由此可推测，结构受到的支承反力可由作用在结构上外力之间的**力平衡式** $\sum \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}$ 来求得。力的平衡是结构力学中最基本的内容，将在下一章作详细说明。但是，仅依靠力的平衡关系来求反力有时也有问题。结构支承（地基）的应变也会对反力产生影响，因此若应变不知道，则反力也得不到，反之若反力不知道，则应变也得不到，故反力的计算是相当麻烦的。

这里可将结构支承部分按照力学的观点分成几种类型，通过将支承置换成各自的简单模型便可很容易求得反力。

首先考虑深埋在非常坚硬的地基中的柱（（图 2.8(a)，(b)）。当柱受外力作用时，若埋在地下的部分既无移动也无变形，则可将地基看成对柱构成了“既无移动也无转动”的**固定支座**（图 2.8(a)）。实际上，地基并非完全不变形，即地基不可能是刚体，但若地基与柱相比不容易变形是可以使用上述模型的，反之若柱与地基相比不容易变形则不可以看成固定支座（图 2.8(b)）。这里的问题在于比较，就是对于同一地基则根据柱的刚度不同，有时可看成为固定支座，而有时则不可以看成固定支座。此时判定模型

① 如前所述，对结构而言反力也是外力。

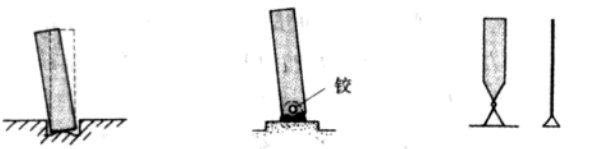


(a) 由于柱与地基相比更容易变形，故固定支座的假定成立　(b) 由于柱刚度大而地基软弱在受力作用时地基的变形也很大，故不能说是固定支座　(c) 固定支座的表示方法

图 2.8　支承状态的模型化(固定支座)

好坏的标准是模型与实际情况之间的容许误差是多少，即**容许极限**[①]。

同样，在非常坚固且不易变形的地基中如图 2.9 所示挖浅而宽的地洞将柱立于其中，对柱垂直向下压时则几乎是不动的，但容易绕下部柱脚产生转动。因此将这种转动自由、又不能左右移动的支承称为**铰支座**。图 2.9(a) 所示的情况是可能上下移动即可能被拔起，故并非正确意义上的铰支座。但当自重大而不存在被拔起的可能性时，是可以假定为铰支座的。



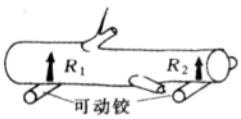
(a) 转动自由的支承状态称为铰支座　(b) 正确使用铰作为结构的铰支座，大部分是如图(a)所示的那样，假定为不可移动而可转动的铰支座　(c) 铰支座的表示方法

图 2.9　支承状态的模型化(铰支座)

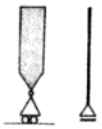
非建筑结构的电车、汽车等是通过车轮和轨道等由地基支承的，这也是一种支承方法。在建筑结构中不大使用而在桥梁等的土木结构中却常与电车、汽车一样在支承部分设置轮子，对木材等也有用滚木支承的。将上述的支承方法称为**可动铰支座**(图 2.10)。固定、铰、可动铰是支承部分的 3 种基本模型。当然可根据方向选择是固定或是铰的支承，如图 2.11 所示，即由上述 3 种基本模型组合所构成的支承构造。

还存在不能用固定、铰、可动铰 3 种基本支承的模型来表示的支承状态。将图 2.3 所示的橡皮用铅笔来代替并推压，如图 2.12 所示其支承部分将发生变形，由于铅笔会转动故不能作为固定支承。但是由于用左手使劲地推住铅笔故其转动不是自由铰，可看作是有弹簧的支承装置，如图 2.13 所示，即随着外力的加大支承的转动也加大，但其对转动的抵抗也加大。将这种有弹簧的支承称为**弹性支座**。弹簧的刚度可根据地基对转动的抵抗能力来求得。

① 容许极限值是根据对荷载、外力建立模型时所必须的精度和使用材料性质的离散性来确定。与结构的模型和支承状态的模型相比，荷载、外力的模型的精度往往要低得多，故容许对结构用相当简化的模型来置换。



(a) 用车轮和滚木支承时移动是可能的。此时反力 R 与移动方向相垂直的方向作用



(b) 可动铰支座的表示方法

图 2.10 支承状态的模型化(可动铰支座)

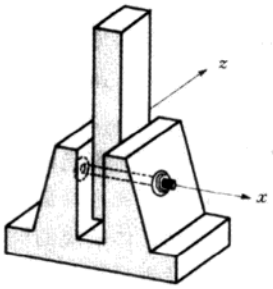


图 2.11 在支承装置中有的随方向的不同支承方法也不同。该图表示,在 x 方向是固定、在 z 方向是铰支承的装置

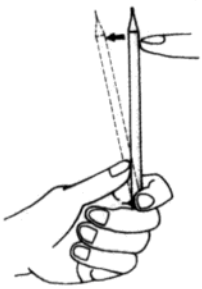


图 2.12 对代替了橡皮的铅笔施加推力,支承部分(左手指)变形、铅笔转动。它是固定、铰、可动铰以外的支承状态



图 2.13 弹性支承



2.4 结构中产生的变形与内力——结构的模型化

受外力作用的结构产生变形并产生内力(关于内力将在下一章中叙述,这里仅理解受外力作用的物体**必然变形**,并在物体内**必然产生内力**)。不要说对实际的复杂外力,就是经过模型化简化了的外力,想求在它们的作用下结构的变形和内力也非易事。其原因如下:

在实际的建筑物中以各种各样的形式使用着各种各样的材料,同时这些材料还往往是非均质的。例如考察钢筋混凝土的墙,在其表面有装修材料(贴有石材等)。混凝土是水泥、砂石、水及其它材料的混合物,若施工不良还会产生蜂窝麻面[①](图 2.14)和开裂。在开洞的部分设置门或

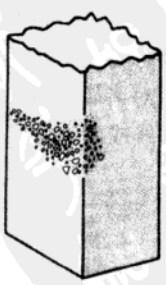


图 2.14 蜂窝麻面

① 是指混凝土在凝固时在混凝土中残留有像面包那样的大的空隙。

在设备用的洞中穿过管道。同时其内部的钢筋也非均匀配置，故其变形和内力也非均匀的。

这样，若着眼于实际结构的局部问题则问题成堆也不容易计算。此外即使能计算，工作量也是相当庞大，设计将会遥遥无期不能完成。至少在设计阶段中是不可能了解诸如蜂窝麻面的具体位置。

因此在设计时，首先需不计及局部而掌握结构总体的响应，当然局部也是重要的。常有这样的例子：破坏首先在局部缺陷处产生，然后扩大引起结构总体的倒塌，因此必须在把握住总体后，在考虑到总体响应的同时来确定局部的构造。对混凝土的蜂窝麻面在施工中产生的缺陷，需判断它是否是位于可能引起结构破坏位置的重大缺陷，然后确定修补的方法①。

不计及局部而掌握结构总体的响应，意味着此时的研究对象已不是实际的结构，而是已将结构特性简化了的“模型”。不过，该模型必须是可以根据其响应去推得实际结构响应的模型，否则便无意义。因此如何对结构进行模型化就成了结构设计的一个要点。此时的模型既可以是实验分析用的模型，也可以是通过公式、数值分析用的数学模型。在第 2 章开始时使用的橡皮与手指就是简单的、却又表示了结构与地基的“实验分析用模型”。为得到外力、反力、内力、变形、形变等的概念，不如使用这样简单的模型更便于达到目的。这样，模型应是根据**通过该模型想知道什么**的目的来选定。

一般，作为模型的第一阶段所进行的工作是将结构分解成几种“形状简单的、具有相同力学特性”的结构**构件**。对复杂形状的结构也可看成是由简单形状的单元结合而成。对简单形状的单元就可以利用公式求得其变形与内力，即可进行分析。当然可以将这些可分析的“单元模型”结合起来构成为结构总体的模型，并求出该总体模型的变形与内力。其中的一例是**有限单元法**(FEM)(图 2.15)。在结构单元中有诸如柱、梁那样的杆状物体；有诸如墙、楼板那样的平面物体；有诸如穹顶那样的曲线状物体；有诸如基础的承台那样的块状物体等②。根据力的作用方法不同，还可以如图 2.16 所示的那样进行细的分类。

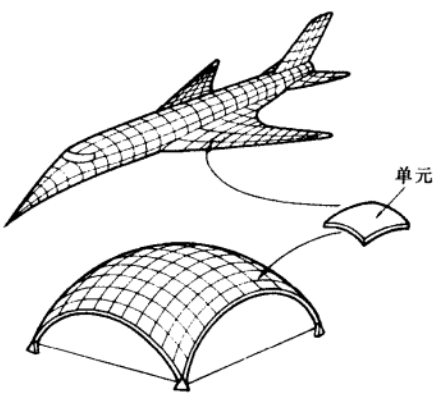


图 2.15 若将结构分割成不同的单元，则各种结构是相似的。将简单的单元组合后可建立结构总体的模型，这就是有限单元法(FEM)

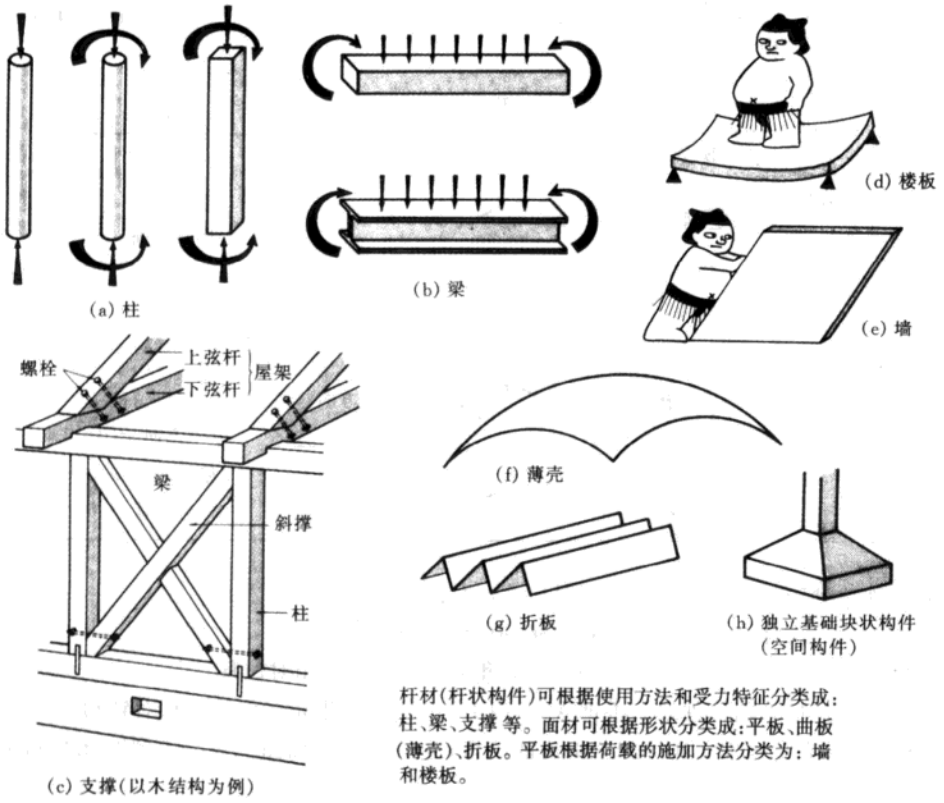
结构单元中除了如图 2.16 所示的由单一单元构成以外，也有如图 2.17 所示的由更小单元组合而成，其总体具有相当于柱或梁功能的构件，称之为**组合构件**。而将不同性质的材料组合而成的构件称为**复合构件**(图 2.18)。

对诸如柱与梁连接部分的结构单元进行模型化时，用点来表示，称之为**节点**(连接部分也有是线或面的情况③)。将几个结构单元通过节点连接形成的结合体称为**子结构**(图 2.19)，而

① 有时也有因施工不善，混凝土的强度总体不足需重建的建筑物。这种因施工不良而倒塌的建筑物的实例也不少。

② 梁是指大致水平设置的杆材，受弯曲作用。柱是指大致垂直设置的杆材，受弯曲和压力作用。墙是指大致垂直设置的平面构件，主要承受平面内的力。楼板是指大致水平设置的平面构件，主要承受平面外的力。

③ 正确地说，应是所有的连接处。节点是指将杆状的构件看成线状构件，将线与线的连接部分认为是“点”。



杆材(杆状构件)可根据使用方法和受力特征分类成:柱、梁、支撑等。面材可根据形状分类成:平板、曲板(薄壳)、折板。平板根据荷载的施加方法分类为:墙和楼板。

图 2.16 根据形状、荷载状态、部位(使用的场所、用途)等决定构件名称

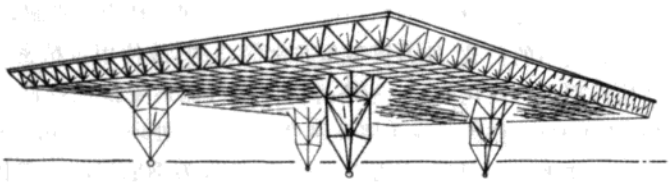


图 2.17 组合构件

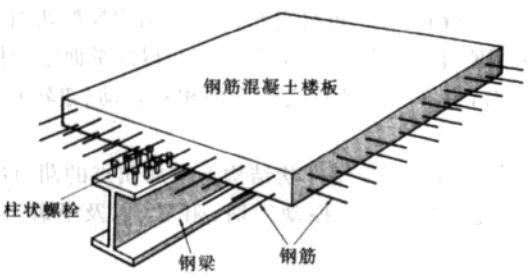


图 2.18 钢筋混凝土楼板与钢结构梁形成的复合结构。为使两者不产生错动而整体地工作,在钢梁中预埋了螺栓

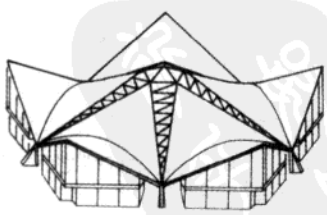
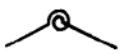


图 2.19 子结构

子结构的集合便是一个结构物。结构单元之间的连接即节点的力学特性与结构的支承部分一样，可划分为如下的模型(表 2.1)。

表 2.1

支承状态	模型	表示方法	内力数	位移条件
不可转动 不可移动	固定(刚接)		$X,Y,M_z(3)$	相对位移 $=0$ 相对转动 $=0$
转动自由 无移动	铰接		$X,Y(2)$	相对位移 $=0$ 相对转动 $\neq 0$
转动自由 单方向可 移动	可动铰接		N(一方向)(2)	相对转动 $\neq 0$ 相对位移 (单方向 $\neq 0$)
可转动 可移动	弹性连接		$X,Y,M_z(3)$	相对转动 $\neq 0$ 相对位移 $\neq 0$

固定：连接处的构件之间不产生相对位移、相对转动。

铰：连接处的构件之间不产生相对位移，但产生相对转动。

可动铰：连接处的构件之间产生相对转动和沿某一方向的相对位移。

弹性支承：连接处的构件之间根据受力(内力)的不同产生相对位移或相对转动。

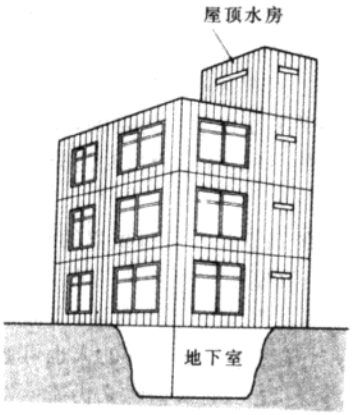
这样在将结构看成是构件与连接部分组成的阶段，建筑结构可如图 2.20(a) 到图 2.20(b) 所示置换成模型。

若使用大容量的计算机，对上述简化模型可以求解(可求出变形、内力)。但是对一般建筑物不可能使用如上所述与实际结构相近的精确模型、花费时间与精力去求解，而是使用更简化的模型。这是由于分析时使用的荷载、外力模型是非常简化的，故使用再精密的结构模型也是没有意义的。在对结构模型进行简化时，首先是将构件尽可能地置换成杆件(图 2.20(c))。对带有墙体的梁或附有墙体的柱，作为考虑了墙体刚度的杆件来处理。此时由于柱与梁的连接部分不容易变形，故作为**刚体**来处理，其形变为零。同时对楼板为钢筋混凝土整体结构的刚性结构，由于楼板水平方向的变形小，可认为是刚体，称之为**刚性楼板**(图 2.20(d))。当楼板之间的相对转动(扭转)没有问题时或对扭转的影响另行修正时，可将空间(三维)结构模型切割分解为平面(二维)的结构模型(图 2.20(e))。采用刚性楼板假定时，切割分解所得的平面结构按相互之间在楼板位置处的**位移**[①]相等条件来求解，也有考虑楼板之间产生相对转动(扭转)的分析模型。

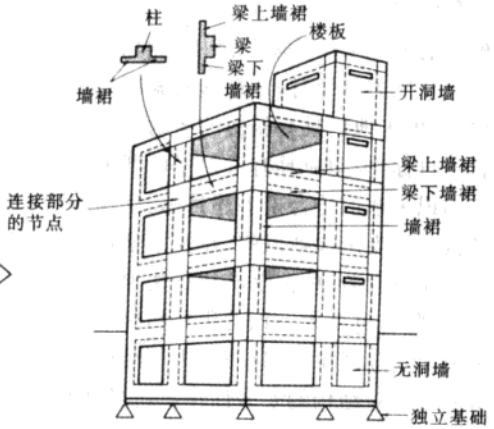
在分析地震时建筑物是如何振动时，可进一步简化使用杆状结构上附加质点的葫芦串模型。此时，实际结构与模型之间存在的对应关系有：质量、振动周期、阻尼[②]以及承载力(图 2.20(f))等。

① 刚体是不变形的，即刚体内部点之间不产生**相对位移**。但由于刚体的移动或转动会产生位移。位移是指位置的变化，即移动或转动。

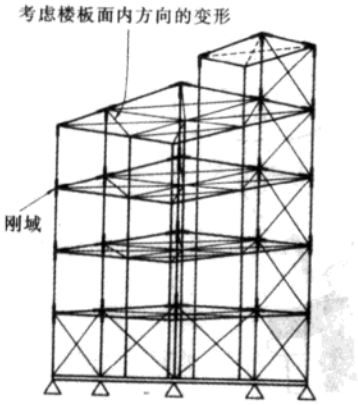
② 将具有能迅速吸收动能(变成热)或使动能逸出外部而使振动减少或停止的结构称为"阻尼大"的结构。



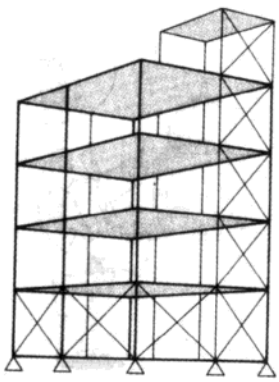
(a) 实际的建筑物



(b) 将建筑结构看成是构件(柱、梁、墙、楼板、基础等)和连接部分的组合并建立建筑物的模型。若使用有限单元法(FEM)则可对这样的模型进行计算

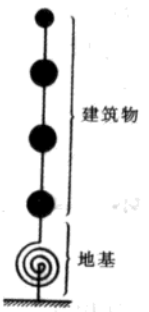


(c) 进一步简化了的模型。即将带有部分墙体的柱、梁等置换成考虑了它们刚度的杆件。将节点部分作为无相对变形的刚体处理。墙与楼板也置换成等价刚度的杆件(斜撑)

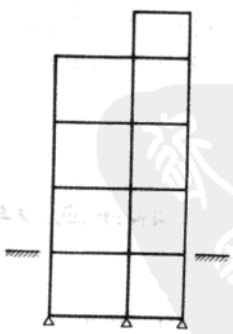


(d) 可考虑扭转等空间变形的空间模型。不过假定楼板是刚性的





(f) 建筑物与地基的振动分析模型

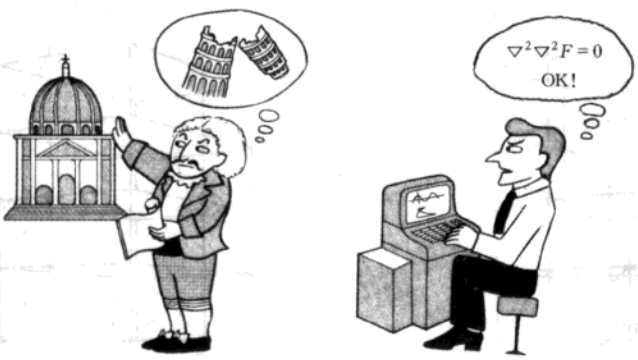


(e) 将建筑物沿纵向切割成平面结构模型(最常用的模型)

图 2.20 对建筑物建立模型的各种阶段

但是我们想知道的不是模型的响应而是实际建筑物的响应。因此，在前文已叙述过：必须能通过模型的响应来推测实际结构的响应。图 2.20(f) 的葫芦串能作为建筑物的分析模型，是由于受地震和风力作用时，建筑物的振动与葫芦串发生的振动之间有共同之处。用结构力学的语言来说，是由于他们具有相似的运动方程式。这样，所谓模型并非仅以简化为目的，而是以下面的内容为目标：模型应具有可根据模型来推测实物性质的明确目标，选择模型时需充分利用结构力学知识来选取适合于上述目标、且容易分析的模型。

在结构力学尚未成熟以前，建筑家是根据从前人那里学到的知识和自己所积累的经验，对结构安全性作出判断。根据汉谟拉比法典[①]，由于建筑家的错误致使房屋倒塌死人时，对建筑家可处以死刑。经过前人知识的积累和整理，并通过理论的证明才形成了结构力学。当通过数学公式来说明实际现象后，只要外力与结构的模型妥当，即使经验并不十分丰富的人也可通过数值分析的方法对结构的安全性作出适当判断。但是即使在今天，适当的模型建立仍需依赖于结构力学与设计实践两方面的丰富经验，模型的好坏决定了结构设计质量的优劣(图 2.21)。但是，近来由于结构力学和计算机的发展，设计逐渐发展成无论由谁来设计均使用同样的模型，即“一般化的、数学公式化的模型[②]”。



(a) 过去的建筑家依靠经验　　(b) 现代的建筑家依靠数学公式

图 2.21　过去和现代的建筑家

当外力的模型作用在结构的模型上时，模型结构中产生的**变形和内力**的计算就完全是结构力学的问题，将在下一章中详细说明其内容的要点。请注意，在今后只要不特别说明就不再特意指出所研究对象是模型，用数学公式来表示时也是把实际现象和实际事物抽象化了的模型为对象。



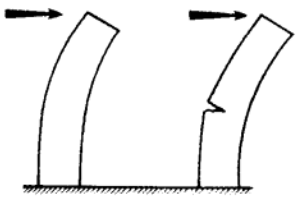
2.5　容许应力与破坏

对外力作用下的结构需提出的问题是：“结构将会产生怎样的变形和应力?”这是因为当

① 公元前 1600 年巴比伦的汉谟拉比王所制定的法典。

② 如有限单元法即是一例。

变形与应力过大后结构会产生损坏或破坏。反过来也可以说，这是因为变形和应力是作为检验结构安全性的尺度而被使用的。因此，下一个问题将是“变形和应力多大时会产生损坏或破坏”。再一次回到图 2.3(2.1 节) 的橡皮的实验。如图 2.22(a) 所示，产生大的变形后只要停止推压仍可恢复到原来的位置。对如图 2.22(b) 所示的塑料在变形途中便产生开裂，即塑料在外力作用下被破坏。通过该实验可知，即使对同样形状的物体作用同样的外力，由于材质的不同，有的没有问题而有的会被破坏。因此，需对建筑结构中常用的材料：钢材、混凝土、木材、铝、玻璃等制作成同样的形状(称之为**试件**[1]等) 进行拉伸试验。



(a) 橡胶材料　　(b) 塑料材料

图 2.22　推压橡皮后，橡皮变形大而不破坏，塑料开裂发展后被切断。变形大而不破坏的结构所具有的性质称为**韧性**，反之变形不大而破坏的结构所具有的性质称为**脆性**

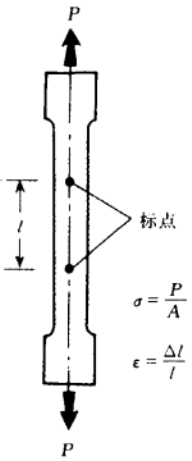


图 2.23　用于材料拉伸试验的试件。将标点之间的中央部分截面制作得比上下支承部分的截面小，以便容易被拉断

为了通过试验得到尽量多的信息，不仅需观察在多大力作用下发生破坏，还应如图 2.23 所示在试件上的两点标以记号(标点) 并观察其长度的变化。将两标点的距离取 l 得长一些，它在受力后长度的变化为 Δl = [受力变形后标点的距离] − [原来标点的距离]，将 Δl 除以原来的长度即 $\Delta l/l$ 定义为**应变** ϵ，并以此整理试验结果。这与取标点距离为 $l = 1$ (cm)[2] 时观察长度的变化是一样的，因此应变 ϵ 是单位长度的**变形量**[3]。另一方面，仅加大试件截面积而不加大外力，则不可能使试件进一步变形或破坏。所谓外力大意味着内力也大(在下一章中将说明外力与内力的平衡)，故使用不同截面积的试件来比较内力是无意义的。这里用面积除内力所得的**应力** σ(单位为：Pa = N/m^2，kgf/cm^2，tf/cm^2，PSI = 1b/in^2 等) 来整理实验结果，其结果见图 2.24。

由此可见，不同材料的力学特性有很大的不同。当进行大量的试验后，例如对木材，根据木材的种类、切取试件的部位、木纹与加力方向的关系和其它条件的不同，应力与应变关系是各式各样的(图 2.25)。此外，对图 2.24 所示钢材的曲线，可看出通过屈服点、极限承载力点、破坏点的路径(σ-ϵ 曲线) 决非是简单的曲线(图 2.24(c))。超过屈服点后即使应力 σ 回到 0，但应变 ϵ 回不到 0，**残留有永久变形(图中的 A 点)**。将应力 σ 回到 0，应变 ϵ 也回到 0 的界限称为**弹性极限**。同时将 σ 与 ϵ 成比例的界限，即图中 σ-ϵ 曲线为直线的界限称为**比例极限**，在比例极限以内的称为**线性区域**。将线性区域中的 σ 与 ϵ 之比，即图中的 $\tan\theta$ 写为 E，即有关系

(1) 关于材料的实验，在 JIS(日本工业规格) 中对试件的尺寸、加力的条件等有所规定。

(2) 长度的单位使用 SI 制(参照第 3 章)，标准长度应为 l = 1 m。目前建筑界常用 CGS 制。

(3) 是比率，无量纲。

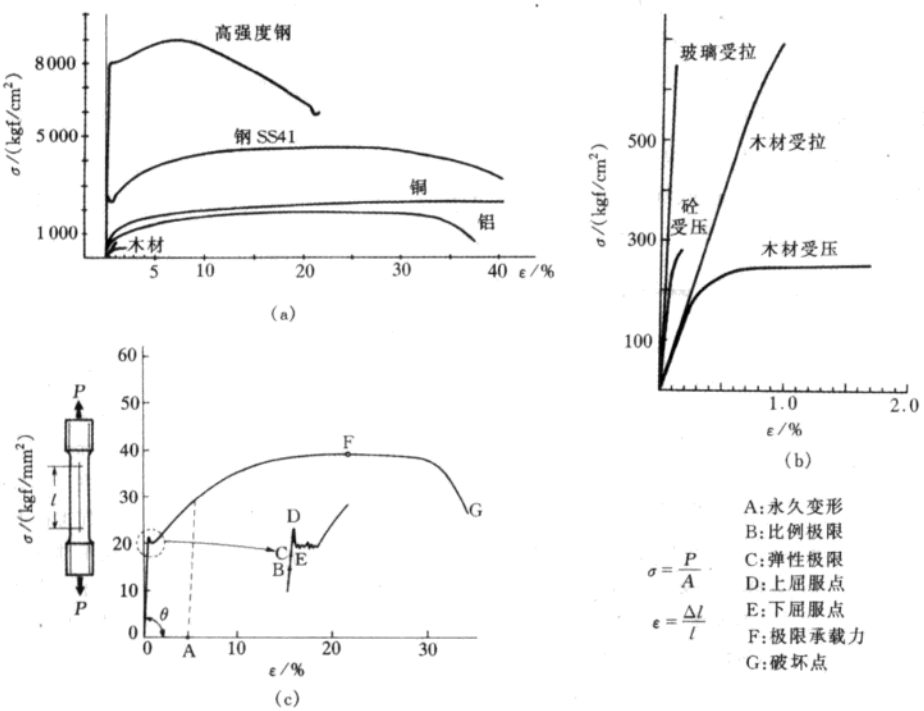


图 2.24　各种建筑材料的应力与应变关系

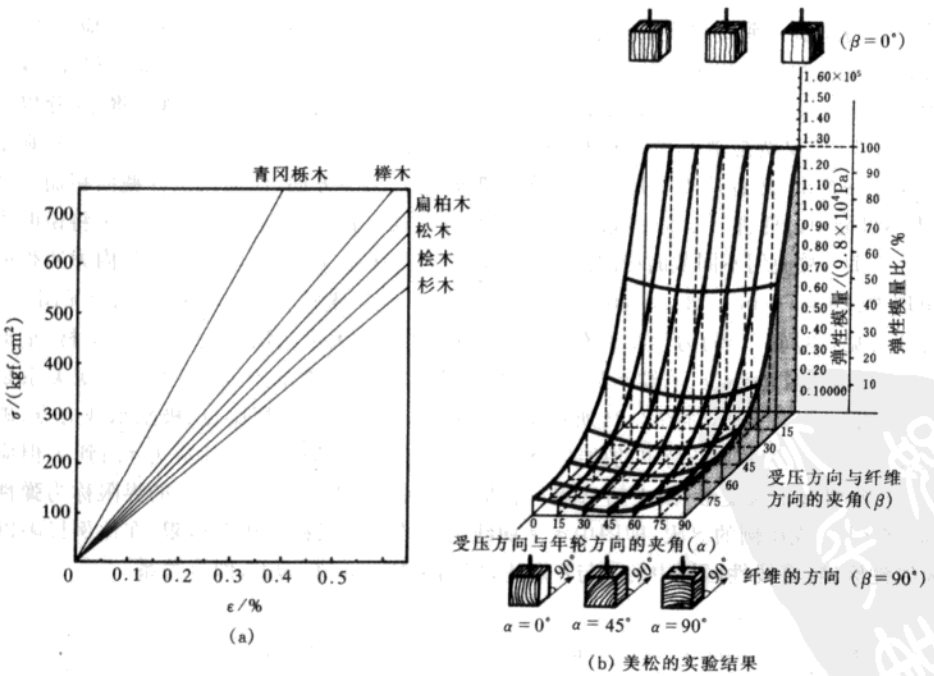


图 2.25　木材的应力与应变关系

$$E = \sigma/\varepsilon \tag{2.1}$$

式中的 E 称为**弹性模量**（杨氏模量[①]，量纲和单位与 σ 相同）。该式是必须记住的重要公式。也许，记住 $\sigma = E\varepsilon$ 更为方便。弹性模量值大的材料不容易变形，即为刚度大的材料。由式(2.1)可明显看出：对同样大小的应力 σ，E 大则 ε 小，变形也小。初看混凝土刚度似乎很大，其 E 值却仅为钢材的 1/10，故是相当柔软的(表 2.2)。同时对混凝土这样材料的 σ-ε 曲线，由于从开始就发生弯曲故其弹性模量 E 和应变 ε 是始终变化的，因此十分不便。其弹性模量的取法是按原点 O 与最大应力 1/3 处的应力 B 点的连线，即用**割线弹性系数**[②]来确定(图 2.26)。

表 2.2 主要建筑材料的相对体积质量与弹性模量

材料名	相对体积质量 ρ/(kg·m)$^{-3}$	弹性模量 E/(9.8×10^4 Pa)	备注
钢	7.85	2.1×10^6	
混凝土	2.3	2.1×10^5	根据材质值略有不同
木材	0.4 左右	0.8×10^5 左右	根据材质和受力方向等值略有不同
铝	2.7 左右	7.0×10^5 左右	同上
玻璃	2.2 ～ 6.3	$(4.0\sim8.0)\times10^5$	同上

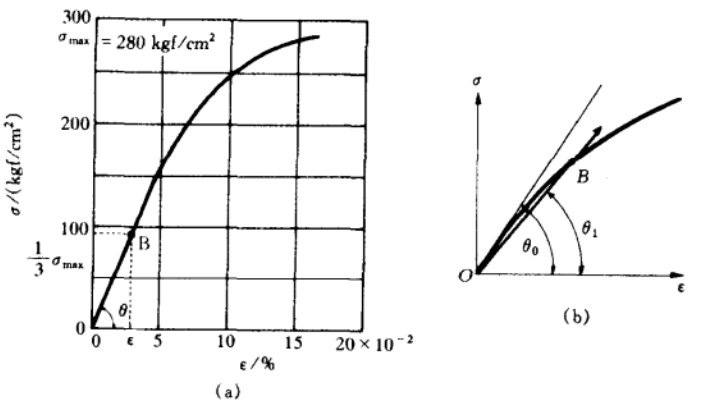


图 2.26

当 σ 和 ε 处于弹性极限以内时，在去除外力后仍可恢复到原来的状态，对结构的变形与应力的设计可采用控制在弹性极限以内的方法。考虑到制作中的误差、施工的质量、计算精度等引起的安全度的离散性，将弹性极限用大于 1 的值 ν 来除（ν 称为**安全系数**）。同时将被除后减小的界限称为**容许值**。例如对在建筑物使用期内可能发生几次中等规模的地震，建筑物的容许变形值取层间变形角为 1/200[③]（图 2.27）。同时，对一般的钢材[④]在长期荷载下的“容许应力”为 1.62 Pa(1.6 t/cm²)。这种先确定容许变形值 $u_{容许}$ 和应力值 $\sigma_{容许}$，然后使结构在外力作用下产生变形和应力的最大值（u_{max}，σ_{max}）不超过它们，即满足关系

① 弹性模量是以学者 T. Yang 的姓名来命名的，也称纵向弹性系数。

② 也称割线模量(second modulus)。

③ 对容许产生大变形且不会因变形大而对局部设计采取措施的建筑物，可容许取 1/120。

④ 建筑用钢材 SS41，厚度不超过 40mm。

$$u_{许} \geqslant u_{max} \quad \sigma_{许} \geqslant \sigma_{max} \tag{2.2}$$

的设计方法，称为**容许变形、容许应力设计法**。

另一方面，考虑到在建筑物使用期内发生的可能性低，但一旦运气不好遭遇地震时则会产生很大的荷载和外力（例如5 000年一遇的大地震），建筑结构将产生超过上述容许值的大变形和应力，并可能引起部分、有时是整体的破坏。从目前的社会理念来看，此时建筑物已产生相当大的损伤，不可能再使用，这当然是无可奈何的事，但必须保证生命的安全。因此，需另行考虑在发生概率小但破坏力强的荷载、外力作用下，保证结构不倒塌的设计方法。这就是**极限强度设计法或极限状态设计法**。此时，必须有下述的关系成立：结构的极限强度大于罕见的大荷载、外力所产生的内力。

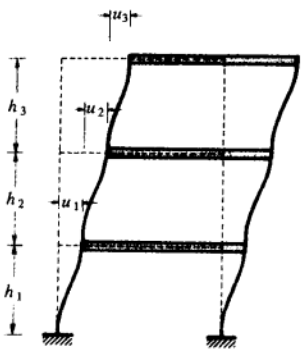


图 2.27 层间变形角 $R_i = u_i/h_i$

在前面的容许应力设计法中，需保证结构的所有构件均不超过容许应力，而极限强度设计法中即使有部分构件应力抵抗不住而发生破坏，但只要整体上仍具有必须的承载能力便可，这是两者的根本区别。同时，在容许应力设计法中，多数的情况是处理力与变形的关系处于比例极限内的**线性结构**问题，而极限强度设计法中是以超过弹性范围为对象的，故处理的是**非线性结构**问题，其结构力学也复杂，尚留有不少目前尚未解决的问题。

[例题1(B)级] 对使用期为50年的建筑物，设想用概率上100年一遇的强风进行设计。在建筑物使用期内达到设想荷载的强风发生概率是多少？

解 这是概率问题而非结构力学问题，但在考虑设计用荷载时十分重要。

首先假定每年发生强风的事件为独立事件，即假定不存在诸如因为今年根本没有强风，所以明年容易产生强风，这样的跨越几年的相互关系。100年一遇的强风在某年发生的概率为 $P = 1/100$（比之更强的风发生的可能性将更小）。反之，100年一遇的强风不发生的概率为 $P' = 1 - P$。

由于假定概率 P' 的事件例如在2年(2次)连续发生的概率 P''_2 为独立事件，它应为各事件之积

$$P''_2 = P' \times P' = (1-P)^2$$

同理，P' 事件在建筑物的使用期内(50年中)连续发生的概率为

$$P''_{50} = P' \times P' \times \cdots \times P' = (1-P)^{50}$$

P''_{50} 为不发生强风的概率，则发生强风的概率为

$$P'''_{50} = (1 - P''_{50}) = 1 - (1-P)^{50} = 1 - (1 - \frac{1}{100})^{50}$$

$$= 1 - (0.99)^{50} = 1 - 0.605 = 0.395 \approx 0.4$$

该结果表明，对使用期为50年的建筑物，即使设想了100年一遇的强风，但在使用期内遭遇如此强风的可能性约为40%的高概率。一般不使用100年一遇的表示方法而使用回归年数 R_p，即以平均100年一遇的比率发生某个值以上的事件时，将该值定义为"回归年数为100年的值"。顺便说明一下，当将使用期为50年与回归年数50年相当的荷载用于设计时，有 $P'''_{50} = 1 - (0.98)^{50} \approx 0.64$，即超过该设计荷载值，事件发生的概率超过了60%。

第 2 章的总结：

1. 所谓结构设计对于力(荷载、外力)来说应安全设计结构物；
2. 怎样的安全程度为好是由社会来决定；
3. 结构力学是结构设计的理论依据；
4. 结构设计包括两个部分，这两部分是相互依存的；



5. 安全性的确认按下述阶段进行：

① 设定设计用的荷载、外力，建立荷载、外力模型；

② 建立结构、支承条件的模型；

③ 计算变形、内力；

④ 对发生概率高的荷载、外力，用容许变形、应力来检验；

⑤ 对发生概率低的大荷载、外力，计算极限承载力并以此来检验。

第 2 章练习题

2.1 在图 2.28 所示建筑物的基本规划、实际设计的流程中，对结构部分作了较详细的描绘。在对自己使用的住宅作设计时，结构规划应考虑哪些条件?结构是怎样确定的?请叙述你的认识。(本题是以熟悉结构的读者为对象，故可以说是 A ～ C 级的问题。解答例是按 A 级问题来写的。)

2.2 这实际上是不可能实现的问题：假设可以在高空的某处设置支座，将用下述材料制成的杆从高空支座上垂下来。在可以承受自重的条件下各种材料的杆可各制成多少 m 的长度?此时各杆的伸长是多少 cm?(设破坏应力为 σ_u，相对体积质量为 ρ，弹性模量为 E 及重力加速度 g(980 cm/s^2) 为常数)。(A 级)—— 可能读者对计算结果会感到惊讶。

(a) 钢 $\sigma_u = 4.4 \times 10^3$ (kgf/cm^2)，$\rho = 7.85$，$E = 2.1 \times 10^6$ (kgf/cm^2)；

(b) 混凝土 $\sigma_u = 30.0$ (kgf/cm^2)，$\rho = 2.3$，$E = 2.1 \times 10^5$ (kgf/cm^2)；

(c) 黑松 $\sigma_u = 700.0$ (kgf/cm^2)，$\rho = 0.4$，$E = 0.8 \times 10^5$ (kgf/cm^2)；

(d) 铝 $\sigma_u = 1\,000.0$ (kgf/cm^2)，$\rho = 2.7$，$E = 7.0 \times 10^5$ (kgf/cm^2)。

2.3 对建筑物进行设计、施工并建造的过程是一个典型的系统工程(SE)。所谓系统工程定义为：

① 具有某种目的(建筑物是作为人类生活的空间来建造)；

② 由一个以上的要素所构成(可将要素考虑为设备、结构等，也可按结构的部位考虑为屋顶、楼板、墙等)；

③ 各要素在系统中分担不同的作用；

④ 在系统的形成与运行中有时间的顺序和次序。

因此，以一幢钢筋混凝土的住宅为例，为建造该建筑物所集中的人员就是一个系统，将工种看成是要素，将各要素列出并记叙它们的次序，将其中与结构关系特别密切的要素用 [] 表示。(对今后想学习建筑结构

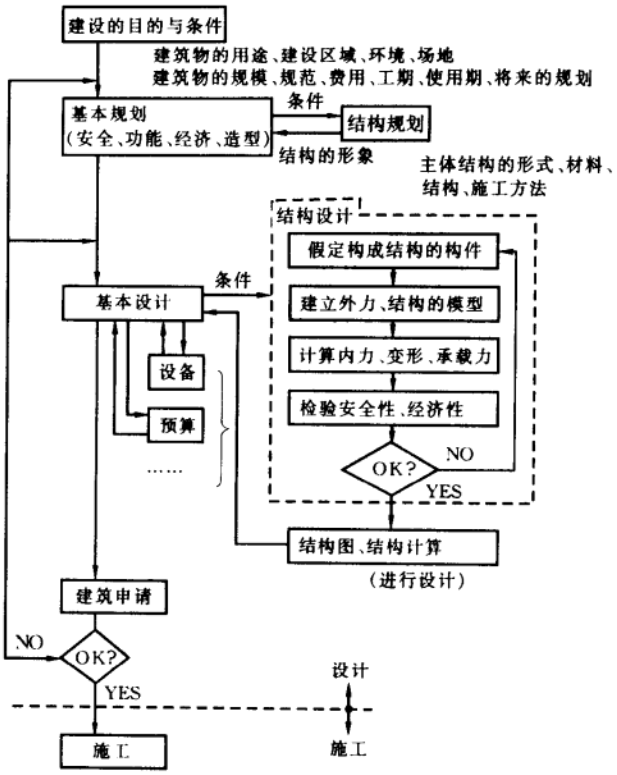


图 2.28 基本规划、基本设计、实际设计和施工流程图

的读者本题是暂时回答不出的，请参照解答例。不过建筑是一项综合的工程，需学习各种知识，若有机会去施工现场时请尽量注意观察)(B级)

2.4 按强度为 A(单位 N) 设计了大量的建筑物，但对实际建筑物的强度调查后发现是标准偏差为 a、平均值为 A 的正态分布。

另一方面，实际的荷载的离散性可用平均值为 B、标准偏差为 b 的正态分布来表示(图 2.29)。

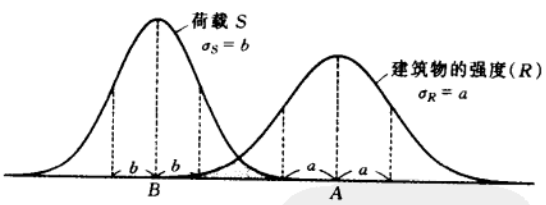


图 2.29 当强度与荷载有离散性时，建筑物的安全性

设 $A = 1.5B$，$a = 0.8b$ 时，荷载可能超过建筑物强度的所谓危险建筑物存在的概率是多少?(实际上不可能是上述简单的关系。本题是C级的问题，可作为考察建筑结构可靠性的第一步。)

3 应力与应变

第3章的内容：理解结构力学基本的外力平衡公式，从概念上了解内力与应力、变形与应变的关系。此外还包括对今后利用价值高的内容，如用微分近似表示函数（泰勒展开）等的复习，SI单位制的说明等。



3.1 力的平衡

力的平衡是与力学有关的所有学术领域的基本问题。结构力学中当物体受力后发生变形，但仍然在变形状态下保持力的平衡。就是对于处于运动中不能保持力的平衡物体，只要引进惯性力这一假想力，代入力的平衡方程便可求解（参照1.5节，达朗贝尔原理）。

在一般力学中学过力平衡原理的读者，只需大致浏览一下3.1节，复习力向量图和力多边形即可。



3.1.1 力的平衡方程式与力向量图

对在力作用下仍能保持静止、即加速度 $\boldsymbol{a}$ 为0的物体，根据牛顿第二定律有下式成立

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}^{①}$$

式中 m—— 物体的质量

此时就物体的**运动**而言是与无外力作用状态相同。但对物体**变形**而言则如第2章所述，有无外力作用是完全不同的。当受外力作用的物体静止时，例如作用在物体内 i 点上的外力用 $\boldsymbol{F}_i$ 表示，而作用在物体上外力的总和（$\sum \boldsymbol{F}_i$）用 $\boldsymbol{F}$ 表示时，则有（图3.1）

① 黑体字表示力为向量。也许有人不喜欢向量，但向量式的书写十分简单。不过令人关心的是，它与我们日常生活使用的计算应如何对应。在阅读了本节后读者可以看到，通过与坐标的结合便很容易解决。开始接触向量时，读者只要简单地将 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ 与 $F = 0$ 认为是大致相同就可以了。

$$\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = 0 \qquad (3.1)$$

由于式(3.1)需向量求和，故首先用图式来求和。在理解和求解工程问题时，往往是从最简单的例题入手，这里也从最简单的情况开始，求两个向量的和。

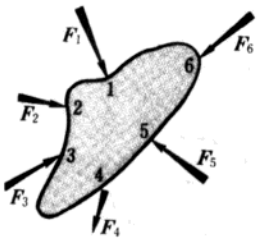


图 3.1 在物体上作用有几个力而物体保持静止时，则外力之间存在力的平衡关系 $\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$

用两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 拉一个物体。对力采取以下的方法来观察(参照1.6节)。如图3.2(a)所示，通过一个弹簧秤来拉物体，实验表明：仅当 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 位于同一作用线上且大小相等、方向相反时物体保持不动。这样，当在静止物体上作用多个力时，若物体保持静止，则称这些作用力相互**处于平衡状态**。用向量来表示，如图3.2(b)所示。用式子来表示，有

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0 \qquad (3.2)$$

将上式改写成 $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$，与图3.2(b)对比可见，对向量仅改变其符号表示它的大小、作用线不变而仅改变方向(即箭头的指向)。

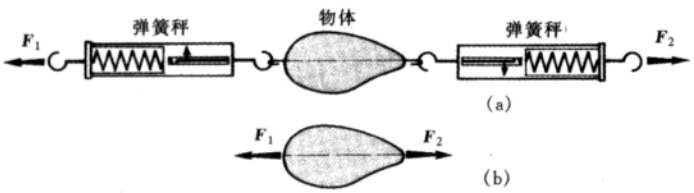


图 3.2 一个物体上有两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 作用时，该物体平衡成立的条件为：(1) $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 大小相等；(2) 作用线一致；(3) 方向相反；即仅在 $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ 时力才平衡

接下来 $\boldsymbol{F}_1$ 保持不变而将两个方向不同的力 $\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_4$ 代替拉力 $\boldsymbol{F}_2$，并通过弹簧秤来观测力的大小(图3.3(a))，此时力的三角形(也称力的四边形)关系成立。将用箭头表示的3个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_4$ 平行移动，并将它们的起点和终点依次连接(称之为**力向量图**)得到一个闭合三角形[①](图3.3(b))。由于此时物体静止，与两个力的平衡条件一样，3个力处于平衡状态，就物体的运动而言与 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ 等价。将之用向量式来表示，有

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = \boldsymbol{0} \qquad (3.3)$$

由于 $\boldsymbol{F}_1$ 不变，综合考虑式(3.2)、式(3.3)，有

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 \qquad (3.4)$$

即 $\boldsymbol{F}_3$ 加 $\boldsymbol{F}_4$ 等于 $\boldsymbol{F}_2$，反之将 $\boldsymbol{F}_2$ 分解即为 $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$。称 $\boldsymbol{F}_2$ 为 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_4$ 的合力，称 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_4$ 为 $\boldsymbol{F}_2$ 的分力[②](图3.3(c))。这样，当用向量来表示力时，可用简单的式子来表示力之和、合力、差[③]、分力等。另一方面，当用箭头来表示力的关系时，合力($\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$)也可由连接力向量图的起点和终点的向量($\boldsymbol{F}_2$)得到(图3.4(a))。反之，以 $\boldsymbol{F}_2$ 作为某一任意闭合三角形的一边即可求得分力(图3.4(b))。

① 此三角形中，$\boldsymbol{F}_1$ 的起点和 $\boldsymbol{F}_3$ 的终点重合。

② $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 的合力 $\boldsymbol{F}_2$ 是唯一的，而 $\boldsymbol{F}_2$ 的分力则存在无穷多。$\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 不过是这些分力中的一组。

③ 差可以考虑为 $+(-\boldsymbol{F})$，即加力时改变向量的方向即可。

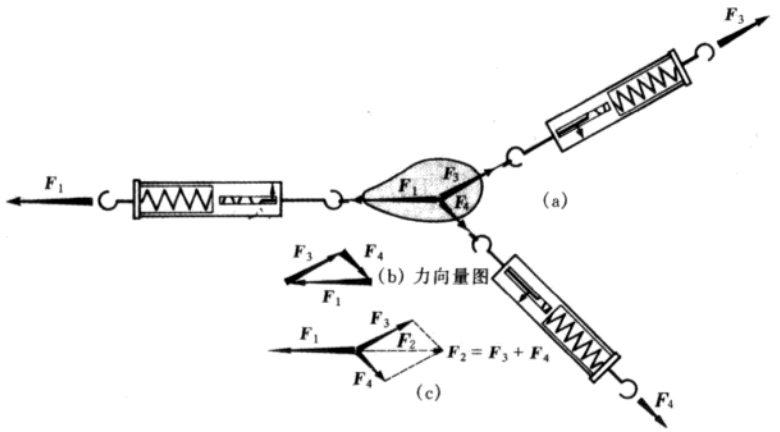


图 3.3 当一个物体上作用三个力 F_1, F_3, F_4 时保持力平衡的条件为：力向量图成闭合的三角形(图 3.3(b))。利用平行四边形法则首先求得 F_3, F_4 的合力 F_2

$$F_2 = F_3 + F_4 \qquad (\text{图 } 3.3(c))$$

然后根据图 3.2 的二力平衡关系，可推导出 F_1 与 F_2 的力平衡关系

$$F_1 + F_2 = 0$$

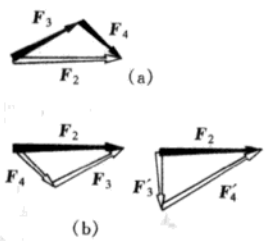


图 3.4 合力与分力

合力 $F_3 + F_4 \rightarrow F_2$

分力 $F_2 \rightarrow F_3 + F_4 (= F_3 + F_4)$

$F_2 \rightarrow F'_3 + F'_4$

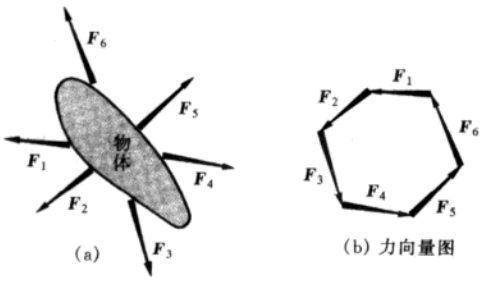


图 3.5 物体上作用有多个力 $F_1, F_2, F_3, \cdots$ 时，若该物体处于平衡状态，其力向量图必构成闭合的多边形(图(b))，有 $\sum F_i = 0$。反之，即使有 $\sum F_i = 0$，且力向量图闭合，该物体也不一定处于力的平衡状态

以上研究了两个力和三个力的平衡，对 4、5、… 个力作用在一个物体上时，只要物体不运动即处于力的平衡状态时，可逐个地将力相加求得力的总和，有下式成立

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = 0 \tag{3.5}$$

如图 3.5 所示，按 $[(F_1 + F_2) + F_3] + F_4 + \cdots$ 顺次合成，力向量图明显地构成了闭合的多边形。

那么，反过来当作用在物体上的力满足式(3.5)且力向量图闭合，可否说力处于平衡状态呢?答案是否定的。

图 3.6(a)，(b) 是几个力作用在一个物体上的一例。此时有 $\sum F_i = 0$，即 $F_1 + F_2 = 0$ 成立且力向量图闭合(起点与终点一致)。

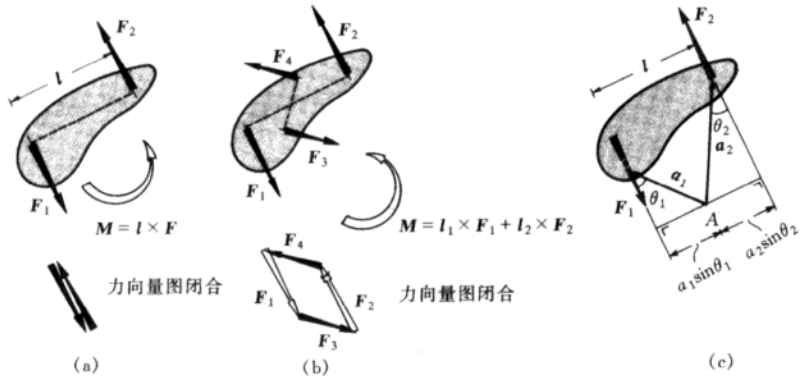


图 3.6 即使力向量图闭合，力与力矩的平衡也不成立

但是，例如以图 3.6(a) 为例，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 形成了力矩 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{F})$，可看出该物体将会转动。要物体不发生转动的必要条件为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$。由图可见，为使 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{l}$ 必须为 0。因此，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 必须位于同一作用线上。对这种情况，对**任意点** A[①] 取 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的力矩，由图 3.6(c) 有

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}(= \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F}_2) \tag{3.6}$$

式中，$\boldsymbol{a}_i$ 为连接 $\boldsymbol{A}$ 点与 $\boldsymbol{F}_i$ 的直线，A 为起点。因此，物体不转动的条件为

$$\sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

一个物体上作用 n 个力的情况也可由上述考虑方法推广而得，即将力 $\boldsymbol{F}_i$ 对某一点 A 的力矩 $\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{F}_i$ 之和 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{F}_i$ 等于 $\boldsymbol{0}$ 作为物体不发生转动的必要条件。反之，若 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$，则物体不发生转动，故它也是不发生转动的充分条件[②]。

因此，一个静止的物体上作用力 $\boldsymbol{F}_i$ 时，为使物体保持静止的必要且充分条件为

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \tag{3.7}$$

该式为作用于物体的**力和力矩的平衡式**。为避免与 3.2 节中出现的内力平衡相混淆并使提法简化，将力与力矩的平衡式统称为**外力的平衡式**(或外力的**平衡方程式**)(图 3.7)。

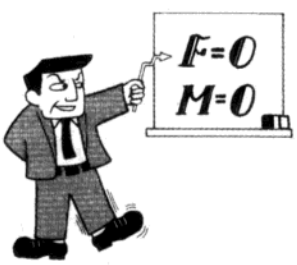


图 3.7 “这就是力的平衡式”



3.1.2 力多边形

当力矩处于平衡状态时，其图形又是怎样。

① 特别需注意的是，力矩平衡式成立的 A 点为**任意点**(在物体外亦可)。

② 对某一事项的必要条件是指为使该事项成立无论如何必须满足的条件，而充分条件是指只要满足该条件则该事项必然成立的条件。例如，有实数 a,b，为使事项 $a^2+b^2=0$ 成立，$a=0$ 是必要条件，但仅此是不充分的。又如对事项 $ab=0$，由于 $a=0$ 不一定必要($b=0$ 也可)，故它不是必要条件，若 $a=0$ 则该事项必然成立故为充分条件。

用力向量图可表示力的大小、方向和作用线，而剩下不能表示的是力的作用点。力在其作用线上移动，对物体总体的力平衡作用效果，是与作用点无关的。当然这样做时物体内部的变形状态——即应变状态是不同的(图 3.8)。

在考虑力矩时也只要知道作用线即可。在工程问题的研究中常使用的有效技术(或方法)之一是："在研究复杂的现象时应从最简单的情况入手"，因此这里先研究两个力($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$)作用在同一平面内时[①]其合力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线位置，为此需绘力多边形。对**力多边形**与其作出定义[②]，不如用实例说明更易理解。其原理是简单的，即将两个力 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 分别分解为两个力，将这 4 个力巧妙合成为一个力 $\boldsymbol{F}$。

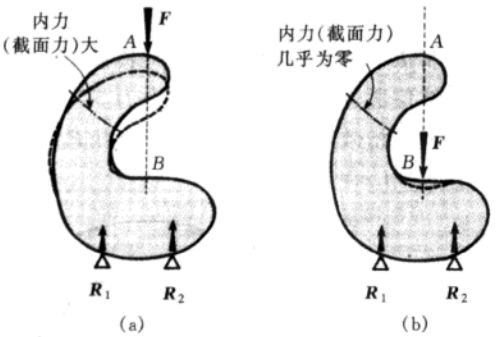


图 3.8 当力的大小、方向和作用线相同时，在考虑物体总体的力平衡问题时，不管力 $\boldsymbol{F}$ 作用在 A 点或 B 点其效果是相同的，因此反力 $\boldsymbol{R}_1$,$\boldsymbol{R}_2$ 也不变。但物体内部的变形状态对图(a)和(b)是完全不同的

图 3.9 为绘制力多边形的程序流程图[③]。图 3.9(f)中移至 D 点的 $\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 的合力，作用线也是确定的。方法的证明可由图 3.9 清楚地看出。即

$$\boldsymbol{F}_1 = \overrightarrow{1A} + \overrightarrow{A2}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \overrightarrow{2A} + \overrightarrow{A3}$$

而

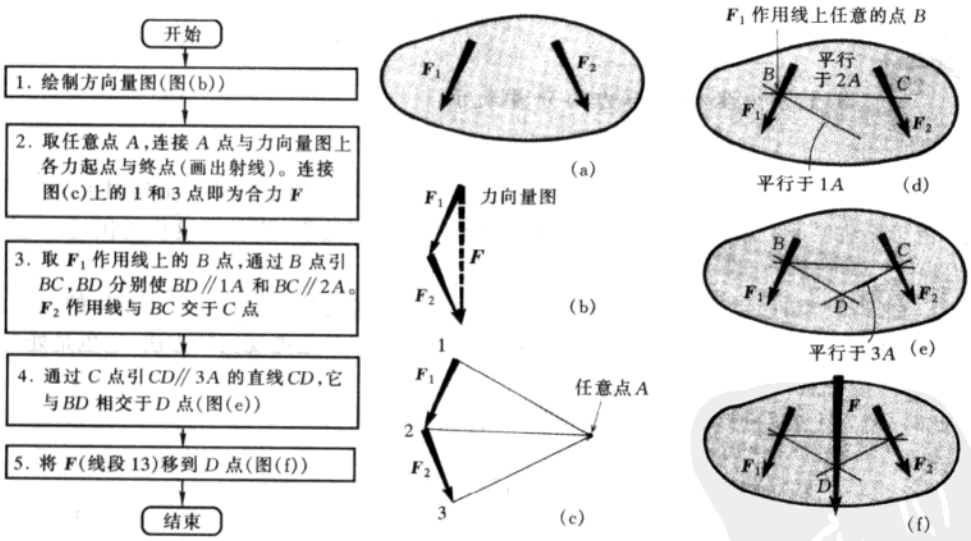


图 3.9 绘制力多边形的程序流程图

① 当不在同一平面时在图上无法求 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力。

② 力多边形是指"为求不交于一点的力的合力而绘制的多边形"(英语为：funicular link poligon)。

③ 流程图是表示计算或其他作业程序的图，一般是从上而下绘制出操作的过程。

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{1A}+\overrightarrow{A2}+\overrightarrow{2A}+\overrightarrow{A3}=\overrightarrow{1A}+\overrightarrow{A3}$$

即只需将 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 用力的分解法变换成$\overrightarrow{1A}+\overrightarrow{A3}$，$\overrightarrow{1A}$ 和$\overrightarrow{A3}$ 的合力相交于 D 点。$\boldsymbol{F}(=\overrightarrow{1A}+\overrightarrow{A3})$ 的作用线应通过 D 点，从而求得合力 $\boldsymbol{F}$。

下面就稍微复杂的问题，即 3 个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 作用在同一平面内时，遵循完全相同的步骤可求得它们的合力(图 3.10)。

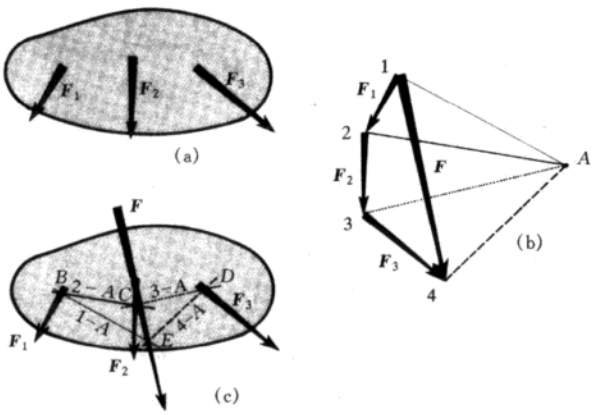


图 3.10 3 个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 作用时的力多边形。如图(b)所示先绘制力向量图，选定任意点 A 进行力的分解，如图(c)所示从 $\boldsymbol{F}_1$ 上的任意点 B 开始作图，逐次求得 C,D,E 点



3.1.3 坐标系与力的分量表示

以上均考虑力作用在同一平面内，若不是这样的情况又如何解决。很明显这时无法用图来表示，由于无法保证力或力的分力相交因此不可能绘制力多边形。当处于这样的困境时，在工程问题中不必拘泥于一种方法而应探求其他的方法。

处理工程问题的主要精神是，为了达到某一目标应尽可能选取最容易达到目标的方法。同时当认识到某一种方法是行不通或困难时，应立即转向寻找其他更现实的方法，这也是处理工程问题的一个特点。

此时，用公式来表示力的平衡则问题便显得简单明了

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}\end{cases}\qquad\text{(前文 3.7)}$$

对非常复杂的空间结构而言，力向量图尚可，力多边形则较麻烦[①]，它们是无法应用的。因此这里放弃图示而用简明的公式来考虑其求解方法。

① 图形求解是将力可视化，故对结构力学的学习而言是有效的。但在计算机发达的今天，它正不断地从实用中消失。

用向量书写的公式(如式(3.4)),由于它与用箭头描绘的向量图有对应关系故容易理解。但用数字表示它时则难于处理①。因此为了能用普通的数字来表示向量,首先需设置一个基准来表示向量的位置和大小,即**坐标系**。

在坐标系中常用的是**右手直角坐标系**。这里的右手是指如图 3.11(a) 所示的,按右手的大拇指、食指和中指的顺序取 x,y,z(或 x_1,x_2,x_3 或 1,2,3 轴)② 为坐标轴。反之,称使用左手(图 3.11(b)) 的为左手系。两者除取指向为正这一点相似外,轴的方向的取法完全不同。例如,当两种体系取同一 x,y 轴时,则 z 轴的指向相反(图 3.11(c))。

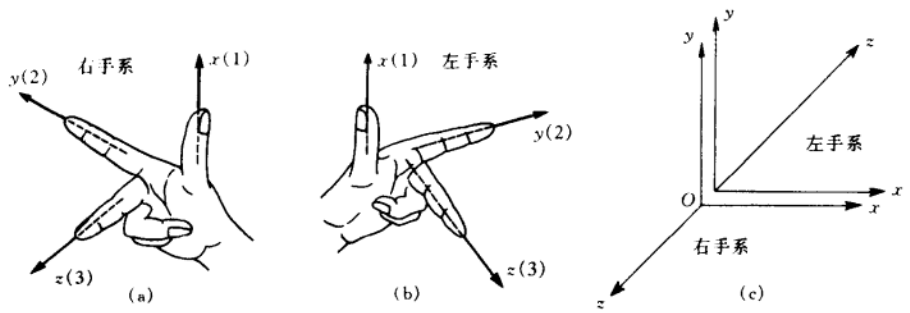


图 3.11 坐标系中常使用相交的三根轴(x,y,z 或 x_1,x_2,x_3 或 1,2,3 轴),交点称为原点记为 O,根据三轴的取法有右手体系(图(a)) 和左手体系(图(b)) 的区别。一般使用右手体系,当两种体系取同一 x,y 轴时,则对应的 z 轴指向相反(图(c))

直角坐标是指三个坐标轴在它们的交点处(称坐标原点,用 O 表示) 相互垂直相交的体系。根据所研究问题的不同,有时取不正交的坐标较便利,此外还有兼用轴和角度等的坐标系(图 3.12)。

本书主要使用右手直角坐标系,当使用其它坐标系时会特别注明。不过,即使右手系也如图 3.13 所示,有种种方向的取法,在结构力学中处理杆状的构件即**杆件**时,惯用的做法是取 $x(x_1,1)$ 轴为杆件的轴向。

由于建筑结构必须考虑重力,往往取 $y(x_2,2)$ 轴或 $z(x_3,3)$ 轴为垂直向下(图 3.13(e)、(g) 或图 3.13(f)、(i))。本书在开始时常取图 3.13(e),即 y 轴垂直向下的体系(取图 3.13(a) ~ (f) 的任一坐标均可,使用惯用的坐标便于与其它书互相参照)。此外,对**简单的问题**,往往不依赖于坐标系的取法而**任意取力的指向,在所取方向上建立力的平衡方程**。如果是处理很复杂的问题,此时宜确定坐标系,这样进行计算就不易出错。此外在编写计算机程序③时,为了发挥计算机处理数字较图形更为方便的特性,需设置坐标系并取坐标系的正向为力或位移的正(+) 方向。

由于图 3.13(e) 的坐标系与数学上常用的坐标系(图 3.13(a)) 略有不同,在开始使用时可能不习惯,但很快便会适应的。至于角度的方向,在图 3.13(a) ~ (l) 的坐标系中均取从 x 轴到 y 轴,从 y 轴到 z 轴,从 z 轴到 x 轴的移动为正。因此,如图 3.14 所示读者需注意的是:在 $x-y$

① 用图形表示的信息称为图象信息,而用数字表示的信息称为数字信息。人们对图象信息容易接受,它比数字信息更容易理解。反之,计算机(数字型) 却适用于处理数字信息。

② 通常取 x,y,z 为坐标轴名,而作为坐标轴的下标则取 1,2,3 较为方便。

③ 为用计算机进行计算必须按计算顺序逐一地对机器发出指令。将这样的指令用计算机能理解的形式记载下来的便是程序。

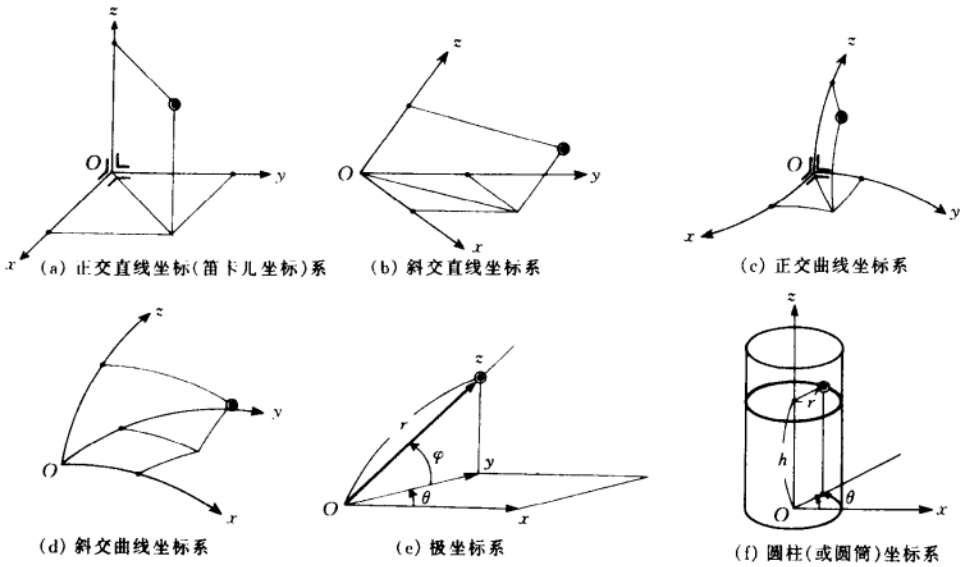


图 3.12 各种坐标系

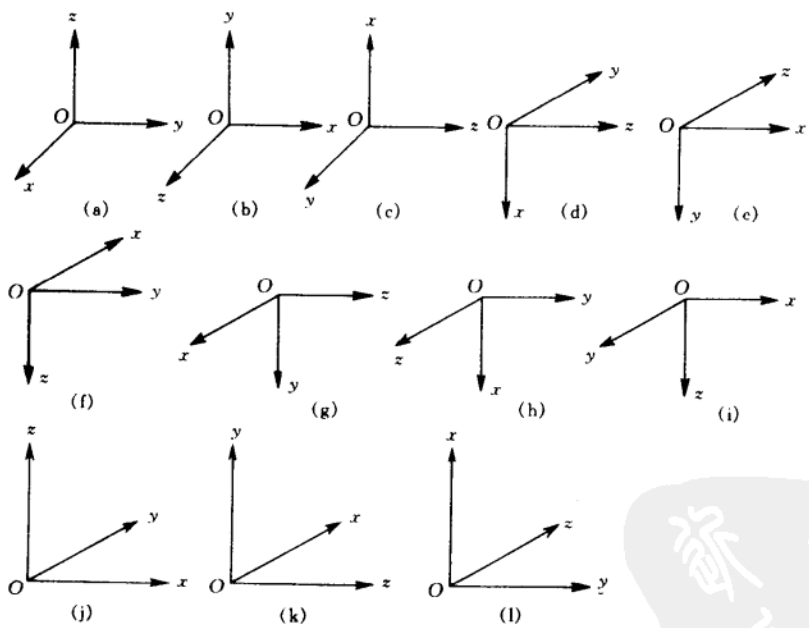


图 3.13 右手正交直线坐标系的种种表示方法

平面(z 平面)[①] 上角度的取法与数学体系中图 3.14(a) 取逆时针为正是不同的,在结构力学

① 今后在不必要时省略图中的 z 轴。

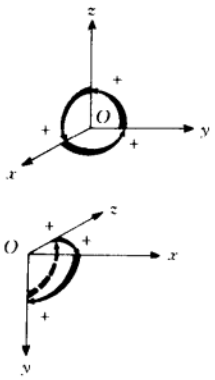


图 3.14 角度正向的取法：总是取 $x\to y\to z\to x$ 为正(+)

中的图 3.13(e) 是取**顺时针为正**。

一旦确定了坐标系，只要表示出向量的**分量**即可确定其大小、方向和作用线。暂时不管作用点，取原点为向量 $\boldsymbol{F}$ 的起点(图 3.15)。这

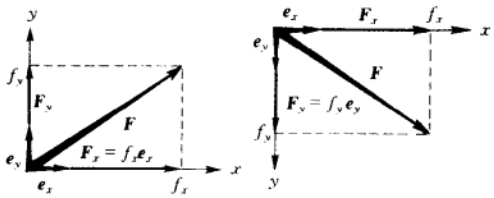


图 3.15 设定了坐标系后向量 $\boldsymbol{F}$ 可由其分量(f_x，f_y)来表示

$$\boldsymbol{F}=f_x\boldsymbol{e}_x+f_y\boldsymbol{e}_y\text{(二维空间)}$$

里画出了图 3.13(e) 类型的坐标系。图 3.13(e) 类型坐标系是取 z 轴方向为由纸外指向纸内。由于这里是取 $\boldsymbol{F}$ 包含在 z 平面内故不需要 z 轴，在绘图时省略了。按坐标轴方向取 $\boldsymbol{F}$ 的分力，有 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y$。该式可利用分别沿 x，y 轴的、大小为 1、指向轴的正向的向量 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 书写为

$$\boldsymbol{F}=f_x\boldsymbol{e}_x+f_y\boldsymbol{e}_y \tag{3.8}$$

这里的 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 称为**单位向量**，在确定了坐标系后它便同时被确定。因此向量 $\boldsymbol{F}$ 可用表示 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$ 大小的两个系数 f_x，f_y 来表示，即可唯一地确定向量 $\boldsymbol{F}$。也就是说，可用普通的数 f_x，f_y 来代替向量 $\boldsymbol{F}$。称这样的 f_x，f_y 为向量 $\boldsymbol{F}$ 在 x，y 轴的分量(大小)。

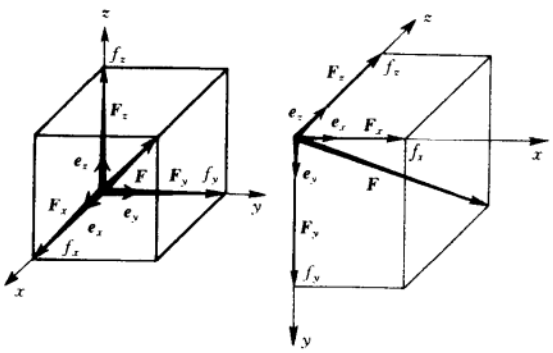


图 3.16 对三维空间同样可通过设定坐标系用分量(f_x，f_y，f_z)来表示向量 $\boldsymbol{F}$。由此可设想将这样的考虑方法推广到一般 n 维空间的向量 $\boldsymbol{F}$，可表示为

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}f_i\boldsymbol{e}_i$$

将二维的考虑方法直接推广到三维的向量，由图 3.16 可清楚地看出有

$$F=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y+\boldsymbol{F}_z=f_x\boldsymbol{e}_x+f_y\boldsymbol{e}_y+f_z\boldsymbol{e}_z \tag{3.9}$$

式中，f_x，f_y，f_z 为 $\boldsymbol{F}$ 的分量，当三个分量确定后 $\boldsymbol{F}$ 便确定[①]。

对单位向量 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$，由于它们相互正交且大小为 1，如 1.7 节所述的两种向量的积，故有

① 对平面(二维)可用两个，空间(三维)可用三个分量来确定一个向量。反之，若可由 n 个分量确定的一个量，其中能适用式(3.9)及其它关于向量运算的量，称为 n 维向量。并称能定义这样的量的空间领域为 n 维空间。

例如对人类而言，将一个人考虑为一个点并当时间确定时，三维空间确定了这个点的位置，再加时间这一维便构成了四维空间，即人类是生活在四维空间内。如果一个人不仅作为一个点，而同时还想表现此人的姿势、即手足的位置等，则需要表示手足位置等更多的分量，也就是说需要多维的空间。

表示结构的运动和变形也与表示人在某一时刻的姿势一样需多维空间。而对结构建立分析模型也可以说是减少维数的过程。

以下的关系成立[①](参照图 3.21)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{向量} & \boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{0}\\ \text{标量} & \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=0,\quad \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=1\end{array}\right\}\tag{3.10}$$

回到式(3.7)的外力平衡公式。首先用分量表示两个向量 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 之和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2&=(f_{1x}\boldsymbol{e}_x+f_{1y}\boldsymbol{e}_y+f_{1z}\boldsymbol{e}_z)+(f_{2x}\boldsymbol{e}_x+f_{2y}\boldsymbol{e}_y+f_{2z}\boldsymbol{e}_z)\\&=(f_{1x}+f_{2x})\boldsymbol{e}_x+(f_{1y}+f_{2y})\boldsymbol{e}_y+(f_{1z}+f_{2z})\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{3.11}$$

式中,f_{1x} 为 $\boldsymbol{F}_1$ 的 x 分量,f_{2x} 为 $\boldsymbol{F}_2$ 的 x 分量(以下类推)。

$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$ 分量为$(f_{1x}+f_{2x})$,$(f_{1y}+f_{2y})$,$(f_{1z}+f_{2z})$,即**向量的和**可简单地取各方向**分量的和**。这可通过绘制"向量和的平行四边形",用几何方法予以证明(图 3.17)。

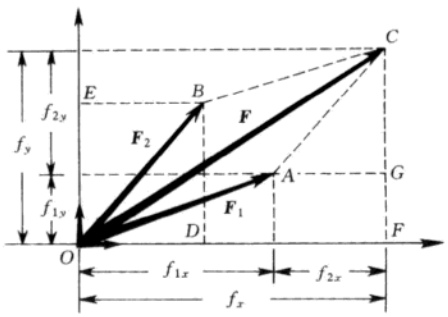


图 3.17 向量的加法($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$)运算中平行四边形法则成立。由此可得 $OB\ /\!/\ AC$,$OB=AC$,故 $\triangle ODB\equiv\triangle AGC$ 成立,可证明 $f_x=f_{1x}+f_{2x}$,$f_y=f_{1y}+f_{2y}$

接下来可利用已有的公式(3.11)来推导作用点不在原点的任意向量的分量表示方法。例如为了表示 $\boldsymbol{F}_2$,从原点分别引连接 $\boldsymbol{F}_2$ 起点和终点的两个向量 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}$(图 3.18)。由于 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}$ 是以原点为起点的向量,在前文已证明有 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 成立。将此式改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_2&=\boldsymbol{F}+(-\boldsymbol{F}_1)\\&=(f_x-f_{1x})\boldsymbol{e}_x+(f_y-f_{1y})\boldsymbol{e}_y+(f_z-f_{1z})\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{3.12}$$

式中,f_x 为 $\boldsymbol{F}$ 的 x 分量(以下类推)。

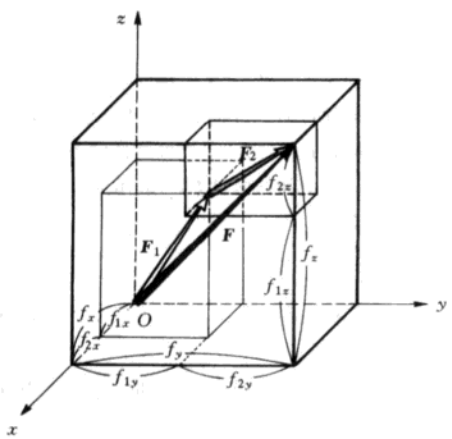


图 3.18 平行四边形法则也适用于三维空间的向量之和 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$,此时各分量有以下关系成立

$$f_x=f_{1x}+f_{2x}$$
$$f_y=f_{1y}+f_{2y}$$
$$f_z=f_{1z}+f_{2z}$$

利用求和公式可证明不通过原点的向量 $\boldsymbol{F}_2$ 的分量有以下关系成立

$$f_{2j}=f_j-f_{1j}(j=x,y,z)$$

由此得到起点不在原点时向量 $\boldsymbol{F}_2$ 的分量表示方法。认真地重新考虑一下这个结论可发现这也是必然的结果,这里只是说明了 $\boldsymbol{F}_2$ 的终点坐标为(f_{2x},f_{2y},f_{2z}),起点坐标为$(f_{1x},f_{1y},$

① 单位向量的大小为 1($|\boldsymbol{e}_i|=1$)且具有下列性质。考虑到 $\sin90^\circ=1,\sin0^\circ=0,\cos90^\circ=0,\cos0^\circ=1$,故有

$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=|\boldsymbol{e}_x|\cdot|\boldsymbol{e}_y|\cos90^\circ\to0$,$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=|\boldsymbol{e}_x|\cdot|\boldsymbol{e}_x|\cos0^\circ\to1$,

$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=|\boldsymbol{e}_x|\cdot|\boldsymbol{e}_y|\sin90^\circ\to\boldsymbol{e}_z$,$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x=|\boldsymbol{e}_x|\cdot|\boldsymbol{e}_x|\sin0^\circ\to0$

$f_{1z})$。在下文中可暂时将向量 $\boldsymbol{F}_i$ 的分量统一记为$[(f_{2x}-f_{1x}),(f_{2y}-f_{1y}),(f_{2z}-f_{1z})]$。$f_1$，$f_2$ 分别表示起点和终点。当仅需表示分量的大小时可写为$(f_x,f_y,f_z)_i$ 或(f_{ix},f_{iy},f_{iz})①。

至此已准备就绪。下面再回过头来考虑本节的最终目的"力的平衡"问题。首先，用力向量图表示的 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}$ 平衡式，可用分量方便地表示为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\Big(\sum_{i=1}^{n}(f_{2x}-f_{1x})_i\Big)\boldsymbol{e}_x+\Big(\sum_{i=1}^{n}(f_{2y}-f_{1y})_i\Big)\boldsymbol{e}_y+\Big(\sum_{i=1}^{n}(f_{2z}-f_{1z})_i\Big)\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}$$

因此，为使向量为$\boldsymbol{0}$，向量的各分量也必须为 0，可得

$$\sum_{i=1}^{n}(f_{2x}-f_{1x})_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}(f_{2y}-f_{1y})_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}(f_{2z}-f_{1z})_i=0 \tag{3.13}$$

若仅需表示分量的大小，公式则更为简单

$$\sum_{i=1}^{n}(f_x)_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}(f_y)_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}(f_z)_i=0$$

请记住，一个向量公式 $\sum\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}$，用任何一种分量表示法来表示均需三个公式。

前文已叙述了无法用力多边形来求解"三维力矩平衡"问题，这里用数学公式来求解。首先，取力矩的点可以是任意的②，这里取坐标原点 O。从原点向力 $\boldsymbol{F}_i$ 作向量 $\boldsymbol{l}_i$，则力 $\boldsymbol{F}_i$ 对原点的力矩 $\boldsymbol{M}_i$ 为(图 3.20)

① 对向量的分量宜纵向地写为 $\begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{pmatrix}_i$ 或 $\begin{pmatrix}f_{ix}\\f_{iy}\\f_{iz}\end{pmatrix}$，这样便于与矩阵的记号取得一致，目前先按$(f_x,f_y,f_z)_i$ 横向书写。如欲将纵向书写方式改为横向书写时可加上标 T，即$(f_x,f_y,f_z)_i^{\mathrm{T}}$(参见附录"矩阵")。

② 外力力矩的平衡，可以选任意的点、即外力关于该点的矩平衡，这一原理在式(3.6)的推导中已简单地进行了叙述。其实这是一个应用广泛并且方便的性质，这里作补充说明。若理解了二维问题，则三维可方便地进行类推，故研究外力均作用在一个平面内的二维问题，在该平面上取坐标轴 x，y(图 3.19)。利用式(3.11)的三角形法则(平行四边形法则)或"力的和可由其分量的和求得"原理，将外力顺次加上并求合力，最后归结为物体上作用两个力的问题(尽管麻烦，但通过力的合成最后置换成等价的少数力，这对物体总体力的平衡或运动问题是可能的。但在求内力和应变时，由于合成力与原力已不等价，故不能应用力合成的方法)。设顺次合成后最后剩下的两个力为 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，它们的分量为(f_{1x},f_{1y})，(f_{2x},f_{2y})，则力的平衡方程可记为

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}\text{(向量表示)},\text{或 }f_{1x}+f_{2x}=0,f_{1y}+f_{2y}=0\text{(分量表示)}$$

这些公式表示 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 为大小相等方向相反的两个力。当满足关系 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0}$的两个力偶均位于同一作用线上时(图 3.19(a))，明显地有力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$。当对任意点 A 取矩时，从 A 引垂线可计算 $\boldsymbol{M}$ 的大小

$$M_1=F_1h_1,M_2=F_2h_1=-F_1h_1\quad\text{所以 }M=M_1+M_2=F_1h_1-F_1h_1=0$$

当满足 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0}$关系的两个力作用线不一致时，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 如图 3.19(b)所示互相平行。对任意点 A 取矩时从 A 分别引垂线 h_1，h_2，有

$$M_1=F_1h_1,M_2=F_2h_2=-F_1h_2\quad\text{所以 }M=M_1+M_2=F_1h_1-F_1h_2=F_1l$$

故两力之间的距离 l 与力的大小之积便是外力矩，而与 A 的位置无关。A 点取在物体外亦可。转动的方向(角度的符号)取从 x 轴到 y 轴为正。因此，图 3.19(a)中以逆时针转动为正，而图 3.19(b)以顺时针转动为正。外力的方向，由于已定义了以右手螺旋方向为正(+)，故图 3.19(b)以顺时针转动的力矩是由纸外指向纸内为正并与图 3.19(b)体系 z 轴的正向一致。同样的力矩若从图 3.19(a)体系来看，由于是顺时针转动故为负(图 3.19(c))。它与由纸内指向纸外的 z 轴的正向相反，故外力矩也定义为负。观察图 3.19(b)、(c)可见，由于坐标轴的取法不同，外力力矩的符号发生了变化，而图 3.19(b)，(c)的外力矩的方向却均是由纸外指向纸内。

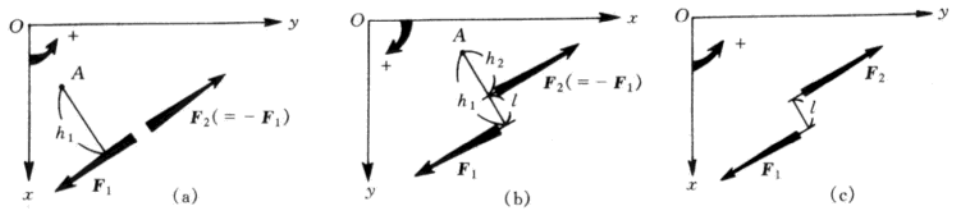


图 3.19 力矩的平衡对**任意点**均适用。可以是原点，也可是 A 点。不论对哪一点取力矩，由两个大小相等方向相反的力($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$) 所构成的力矩大小为两力间垂线的长度与力大小的积($M = l \cdot F$)。图中的 z 轴垂直纸面

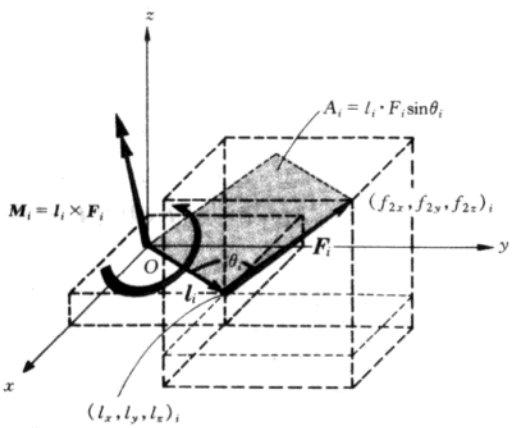


图 3.20 力 $\boldsymbol{F}_i$ 对于原点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}_i$，可从 $\boldsymbol{F}_i$ 的起点引向量 $\boldsymbol{l}_i$ 后得到 $\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{F}_i$。$\boldsymbol{M}_i$ 的大小为图中四边形的面积，其方向为垂直于该四边形的方向，其指向为从 $\boldsymbol{l}_i$ 转向 $\boldsymbol{F}_i$ 时符合右手螺旋法则的方向

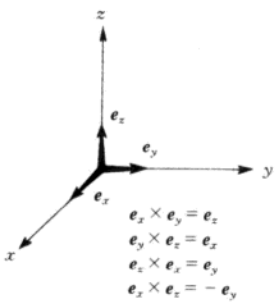


图 3.21 单位向量的向量积：由于 $\boldsymbol{e}_i (i = x, y, z)$ 的大小为 1 且相互正交，故可得图示的关系

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{3.14}$$

可将式(3.14) 改写为向量的分量形式。向量 $\boldsymbol{l}_i$ 的分量为 $(l_x, l_y, l_z)_i$，由于向量 $\boldsymbol{F}_i$ 的起点为向量 $\boldsymbol{l}_i$ 的终点，故向量 $\boldsymbol{F}_i$ 可记为 $[(f_{2x} - l_x), (f_{2y} - l_y), (f_{2z} - l_z)]_i$，式(3.14) 可变换成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_i &= \boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{F}_i = (l_x\boldsymbol{e}_x + l_y\boldsymbol{e}_y + l_z\boldsymbol{e}_z)_i \times \{(f_{2x} - l_x)\boldsymbol{e}_x + (f_{2y} - l_y)\boldsymbol{e}_y + (f_{2z} - l_z)\boldsymbol{e}_z\}_i \\ &= [l_x(f_{2x} - l_x)]_i(\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x) + [l_x(f_{2y} - l_y)]_i(\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y) + [l_x(f_{2z} - l_z)]_i(\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z) \\ &\quad + [l_y(f_{2x} - l_x)]_i(\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x) + [l_y(f_{2y} - l_y)]_i(\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y) + [l_y(f_{2z} - l_z)]_i(\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z) \\ &\quad + [l_z(f_{2x} - l_x)]_i(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x) + [l_z(f_{2y} - l_y)]_i(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y) + [l_z(f_{2z} - l_z)]_i(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z)\end{aligned}$$

利用式(3.10) 对上式进行整理[①]，有

$$\boldsymbol{M}_i = (l_y f_{2z} - l_z f_{2y})_i\boldsymbol{e}_x + (l_z f_{2x} - l_x f_{2z})_i\boldsymbol{e}_y + (l_x f_{2y} - l_y f_{2x})_i\boldsymbol{e}_z \tag{3.15}$$

$(l_x, l_y, l_z)_i$ 也是 $\boldsymbol{F}_i$ 的起点坐标，可写为 (l_{1x}, l_{1y}, l_{1z})，故上式可写成

① 例如 $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x) = -\boldsymbol{e}_y$，此时 $-\boldsymbol{e}_y$ 表示绕 y 轴的负单位力矩(图 3.21)。用图形表示力矩时，不用圆弧而用双重的箭头来表记，它与相关的向量运算关系明确，在习惯后双箭头表示十分方便(图 3.20)。

$$\boldsymbol{M}_i = (f_{1y}f_{2z} - f_{1z}f_{2y})_i\boldsymbol{e}_x + (f_{1z}f_{2x} - f_{1x}f_{2z})_i\boldsymbol{e}_y + (f_{1x}f_{2y} - f_{1y}f_{2x})_i\boldsymbol{e}_z \tag{3.16}$$

若用行列式[①]的形式来表示，可写成

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \end{vmatrix}_i \tag{3.17}$$

由式(3.16)，$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}$ 的向量公式可写成各方向分量之和为0的3个公式，即

$$\sum_{i=1}^{n}(f_{1y}f_{2z} - f_{1z}f_{2y})_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n}(f_{1z}f_{2x} - f_{1x}f_{2z})_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n}(f_{1x}f_{2y} - f_{1y}f_{2x})_i = 0 \tag{3.18}$$

式(3.13)和式(3.18)的各3个公式合计为6个公式即为各外力向量的起点分量表示的**外力平衡公式**，它们相当于式(3.7)用向量表示的外力平衡公式[②]。

[例题1(A级)] 如图3.22(a)所示在长为 l 的杆两端挂有重锤 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$。求用铰支承杆的支点 C 的位置及支点反力。

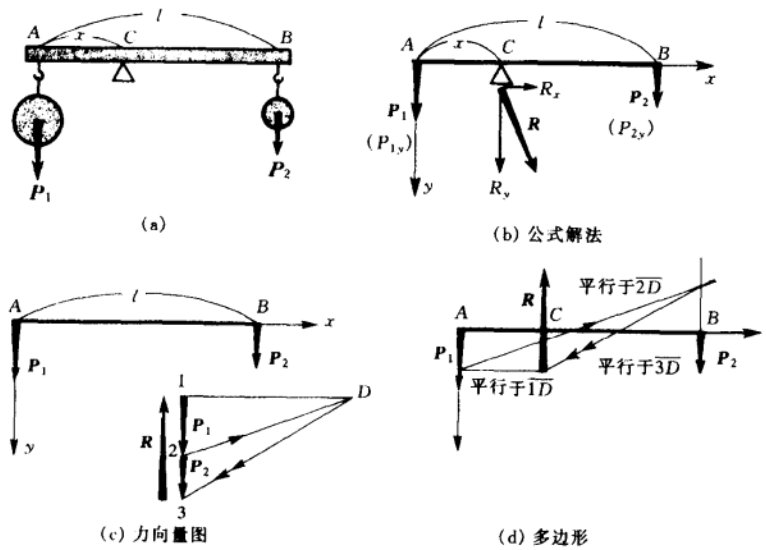


图 3.22 例题1：求两个力 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 的平衡支点 C 的位置及支点反力 $\boldsymbol{R}$ 的问题

解 无论用公式或图解均可容易地求解。由于是铰支承，故在支点上的反力无力矩作用。

(1) 公式解法：如图3.22(b)所示取坐标轴，令反力为 $\boldsymbol{R}$，其作用点为 $C(x,0)$，其分量为 (R_x,R_y)。荷载 $\boldsymbol{P}_1:(P_{1x},P_{1y})$，$\boldsymbol{P}_2:(P_{2x},P_{2y})$ 在 x 方向的分量为0($P_{1x}=0$，$P_{2x}=0$)，根据作用在杆上的外力 x 方向的平衡方程有 $R_x=0$。再建立 y 方向的平衡方程有

① 关于行列式可参见附录"矩阵"。

② 用行列式表示时，(3.18)式第3式的形式为 $\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{vmatrix}_i = 0$，将 (x,y) 按顺序替换成 (y,z)，(z,x) 可得其它的公式。

$$P_{1y}+P_{2y}+R_y=0$$

所以
$$R_y=-(P_{1y}+P_{2y}) \tag{a}$$

又由力矩的平衡式(力矩的平衡可对任意点取。对本问题最简单的取法是取 C 点，此时可消去 R_x，R_y。同时取顺时针的力矩为正)

$$(1-x)P_{2y}-xP_{1y}=0$$

所以
$$x=\frac{lP_{2y}}{P_{1y}+P_{2y}} \tag{b}$$

由以上分析可得，$\boldsymbol{R}$ 的分量为 $(0,-(P_{1y}+P_{2y}))$，R 的作用点 C 的坐标为 $(lP_{2y}/(P_{1y}+P_{2y}),0)$。

(2) 图解法：首先通过力向量图可知 $\boldsymbol{R}$ 的大小、方向和作用线(图 3.22(c))。然后绘制力多边形求得 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 的合力，可得 $\boldsymbol{R}$ 的作用线和支点(图 3.22(d))。

[例题 2(A 级)]　如图 3.23(a) 所示长为 l 的杆两端用铰和可动铰支承。在杆的中点 C 作用有 45° 方向的荷载 $\boldsymbol{P}(10,10)$，求支点的反力(用铰和可动铰支承的梁称为**简支梁**)。

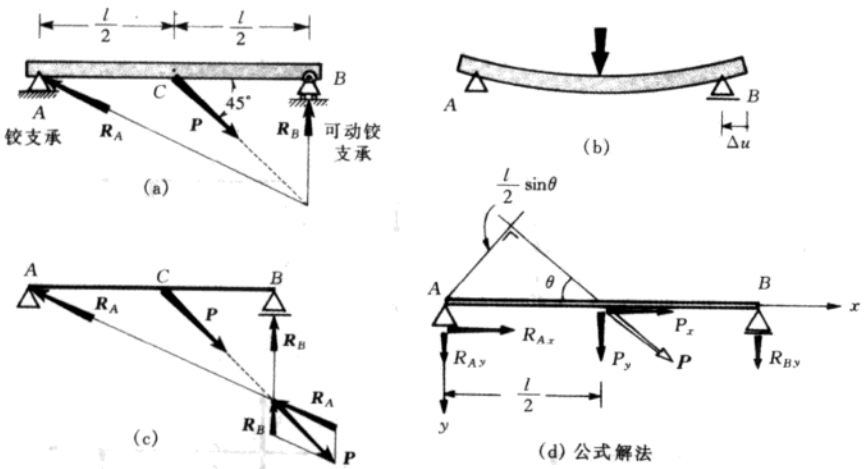


图 3.23　例题 2：求由铰和可动铰支承的“梁”、即**简支梁**的反力问题

解　该题先用图解后用公式求解。

(1) 图解法：当用图解法求解时不一定按力向量图和力多边形的次序也可容易地求得力的大小和作用线。可动铰支承的反力方向或反力作用线是确定的。如图 3.23(b) 所示，若考虑杆在弯曲后可动铰移动则不能简单地求得反力的作用线。但不必这样严格地考虑而可认为可动铰的移动量很小，在工程问题中容许忽略这种小的误差。由于铰和可动铰的支承反力及荷载作用线必须通过同一个交点，故可确定铰支承的反力作用线①。然后建立交点处的力三角形可求得反力 $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$(图 3.23(c))。

(2) 公式解法：如图 3.23(d) 取坐标轴，令反力的分量为未知数 R_{Ax}，R_{Ay}，R_{By}。外力的平衡式为

力的平衡式

$$R_{Ax}+P_x=0 \tag{a}$$

$$R_{Ay}+R_{By}+P_y=0 \tag{b}$$

力矩的平衡式(关于原点 A 的力矩平衡式)

① 一个物体上作用三个外力时，若这些外力既不相互平行，它们的作用线也不交于一点则 $\sum \boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$ 不成立。因此外力的平衡式也不成立。

$$(l/2)\sin\theta \cdot P + l \cdot R_{By} = 0 \tag{c}$$

及

$$P_x = P\cos\theta,\ P_y = P\sin\theta\ (\theta = 45°) \tag{d}$$

将它们联立求解可得以下结果

由式(a)、(d)得 $R_{Ax} = -P/\sqrt{2}$ (e)

由式(c)得 $R_{By} = -P/2\sqrt{2}$ (f)

由式(b)、(f)得 $R_{Ay} = -P/2\sqrt{2}$ (g)

[例题 3(A 级)] 一个物体 V 作用有两个外力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$。为使物体保持平衡状态欲在原点施加力 $\boldsymbol{F}_3$ 和力矩 $\boldsymbol{M}$。$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的起点坐标分别为(−2，−4，−1)和(−1，−2，−1)，终点坐标分别为(4,5,5)和(−2，−4，−5)。求 $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{M}$(图 3.24)。

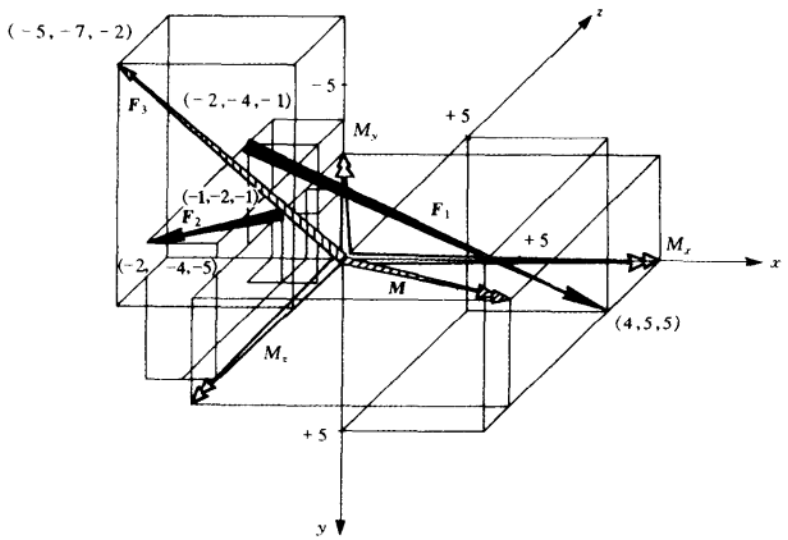


图 3.24 例题 3：三维空间的力矩平衡问题。将力和力矩均用分量表示则数值计算会容易些

解 当力和力矩作用在同一平面内时，用图解法和公式法效果是相同的。但对空间作用的外力(非二维而是三维)图解法则无能为力，此时应毫不犹豫地选用公式法。为用式(3.13)、(3.18)进行计算，采用表格表明计算步骤。

	起点			终点			力的平衡(式(3.13))			力矩的平衡(式(3.18))		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
l	f_{1x}	f_{1y}	f_{1z}	f_{2x}	f_{2y}	f_{2z}	$f_{2x}-f_{1x}$	$f_{2y}-f_{1y}$	$f_{2z}-f_{1z}$	$f_{1y}f_{2z}-f_{1z}f_{2y}$	$f_{1z}f_{2x}-f_{1x}f_{2z}$	$f_{1x}f_{2y}-f_{1y}f_{2x}$
$\boldsymbol{F}_1$	−2	−4	−1	4	5	5	6	9	6	−15	6	6
$\boldsymbol{F}_2$	−1	−2	−1	−2	−4	−5	−1	−2	−4	6	−3	0
$\boldsymbol{F}_3$,$\boldsymbol{M}$	0	0	0	x_2	y_2	z_2	$x_2=-5$	$y_2=-7$	$z_2=-2$	$M_x=9$	$M_y=-3$	$M_z=-6$
					$\sum$	=	0	0	0	0	0	0

根据力和力矩的平衡，各列的和应为 0。故有

$$x_2 + 6 - 1 = 0，由此得\ x_2 = -5$$

同样有

$$y_2 = -7,\quad z_2 = -2,\quad M_x = 9,\quad M_y = -3,\quad M_z = -6$$

将 $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{M}$ 合成后便成为图 3.24 中 $\boldsymbol{M}$，在 $\boldsymbol{M}$ 的合成中由于双箭头表示法可方便地使用向量加法中的三角形法则（或平行四边形法则），故它比带箭头的圆弧表示法更方便。

$\boldsymbol{M}$ 的大小（M）为

$$M = \sqrt{9^2 + (-3)^2 + (-6)^2} \approx 11.2$$



3.2 内力

牛顿看见苹果从树上掉下来才注意到万有引力的存在。为使苹果处于下落的运动状态，必须在苹果上作用向下的拉力 $\boldsymbol{F}$。若不这样，则违反了牛顿发现的第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$（图 3.25）。因此牛顿认为是地球在吸引苹果。根据牛顿第三定律，即作用与反作用的法则，地球也被苹果吸引。但是地球质量约为苹果质量的 10^{29} 倍，地球产生的加速度便为苹果的 $1/10^{29}$，因此实际上地球不动而苹果落向地面。这里我们将站在与牛顿不同的立场，研究未落下仍留在枝头上的苹果。自然界是公平的，不可能有在某一个苹果上作用有万有引力而在其他苹果上不作用这样的差异。因此，留在枝头的苹果也必然受到引力的作用。“在力作用下为什么苹果不掉下来”？这个问题正如我们在第 2 章已叙述过的，理解了它也就理解了结构力学的 1/3。答案是，这是由于苹果的把或枝上“产生了**内力**”①。



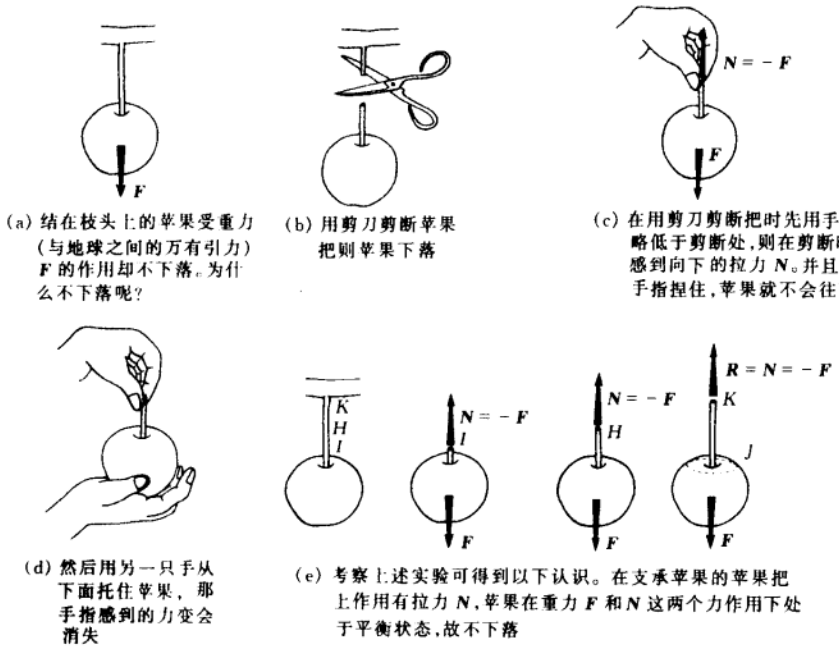
图 3.25 苹果掉下 —— 万有引力，苹果不掉下 —— 内力（截面力）

为了理解内力，用剪刀剪断苹果把（图 3.26(b)），苹果当然会下落。为使它不落下，用手指捏住要剪断的苹果把，则手指会有受力的感觉（图 3.26(c)）。再用另一只手托住苹果，则手指感受到的力消失。这只手挪去则手指又可感受到力的作用。由此可推测，在未剪断的苹果把上作用着与作用在苹果上的万有引力相平衡的力，该力将苹果向上拉住，从而使苹果处于力的平衡状态而不产生运动。从下面用手托住苹果，可产生与重力相互平衡的力，使苹果把不受到力的作用，这可以从图 3.26(c) 中得到启示。这样，当对物体（这里是带把的苹果）施加外力（这里是引力 $\boldsymbol{F}$）时，与此“相应地”在物体内部（这里是苹果把）产生的力称为内力②。一旦外力消失则内力也不复存在。内力并非只产生在苹果把上。不论是在图 3.26(e) 的 H 点剪断，在 I 点剪断，或在苹果本身的 J 点剪断，均可体验到与万有引力 $\boldsymbol{F}$ 平衡的内力 $\boldsymbol{N}$ 的作用。

我向 Y 君解释到这里，他直摇头，说：“老师，那就奇怪了。若在 H 点、I 点均作用有 $\boldsymbol{N}$，将它

① 更准确地说应是，“这是由于苹果把或枝上**产生了内力**，而苹果把或枝能抵抗该内力而**不折断**”。在设计建筑物时也需首先求得柱、梁等结构单元在外力作用下的**内力**，然后检验在内力作用下结构单元是否具有抵抗破坏的能力，若能力不够则需修改、重新设计结构单元。

② 对苹果把这样**杆状的物体**，常将内力称为**截面力**。称之为截面力是因为这样更便于理解通过剪断可以感知到内力存在的特性。



(a) 结在枝头上的苹果受重力（与地球之间的万有引力）F 的作用却不下落。为什么不下落呢？

(b) 用剪刀剪断苹果把则苹果下落

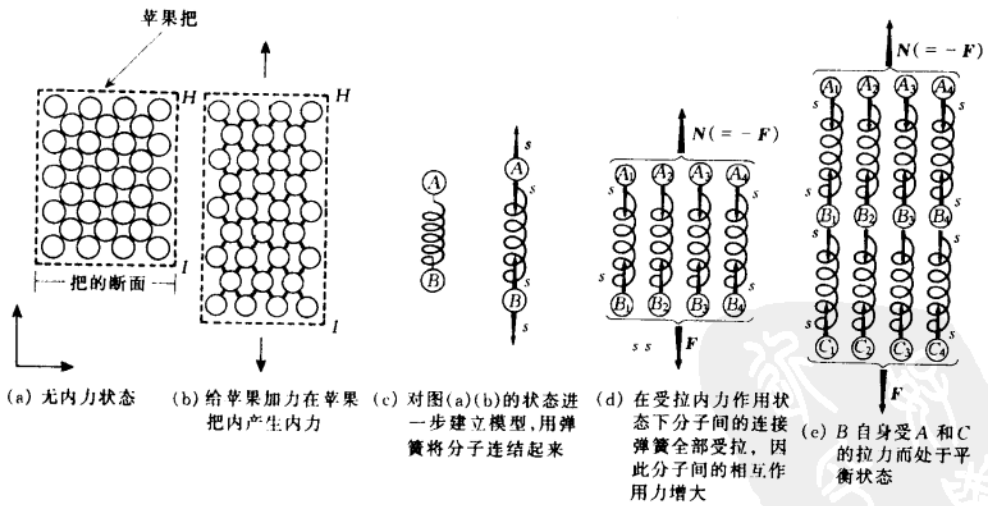
(c) 在用剪刀剪断把时先用手指捏住略低于剪断处，则在剪断时手指感到向下的拉力 N。并且只要用手指捏住，苹果就不会往下掉

(d) 然后用另一只手从下面托住苹果，那手指感到的力变会消失

(e) 考察上述实验可得到以下认识。在支承苹果的苹果把上作用有拉力 N，苹果在重力 F 和 N 这两个力作用下处于平衡状态，故不下落

图 3.26 为理解内力做的实验

们加起来是 $2N$，由于 $F = N$ 则 $2N > F$，那应当会把苹果拉到天上去。”抱有与 Y 君相同疑问的人请看一下图 3.27(a) ～ (e)。该图是将苹果把的部分扩大，按分子的排列形象地用图表示出来。



(a) 无内力状态

(b) 给苹果加力在苹果把内产生内力

(c) 对图(a)(b)的状态进一步建立模型，用弹簧将分子连结起来

(d) 在受拉内力作用状态下分子间的连接弹簧全部受拉，因此分子间的相互作用力增大

(e) B 自身受 A 和 C 的拉力而处于平衡状态

图 3.27 将苹果把局部放大，用模型方法观察分子的排列

图 3.27(a) 为用手从下面托住苹果抵消了重力，结果苹果把内不产生内力。从微观来看，构成把的分子之间的相互引力和排斥力处于平衡状态，结果与没有力作用的情况一样。

图 3.27(b) 为移开支撑的手，作用在苹果上的重力使苹果把受到拉力的作用。由于受拉使

分子间的距离加大。从模型看，用弹簧相互连接的分子 A 和 B 间的距离增大，从而使分子间的吸引力增大(图 3.27(c))。该引力 S 随着分子间距的增大(即应变增大)而增大，如图 3.27(d)所示总体上与加在苹果把上的力平衡。而分子 B 与相邻的分子 C 相连，B，C 之间的距离也增大(图 3.27(e))，同时与 C 也相互吸引，所以 B 自身受 A 和 C 的拉力而处于力的平衡状态。这样的关系不限于分子 A，B，C，而是遍及整个苹果把的分子 D，E，F，…，因此在受力的物体中(例如本例的苹果和苹果把)处处产生应变和内力[①]。

此时，相互作用的各分子本身是处于平衡状态，从加力点到支承物体的点之间只起到“传递力的作用”，而并未施加任何新的力。

在求内力时往往将物体切开，例如在 B，C 之间切开，此时对位于 A，C 两分子之间由力 S 连结而处于平衡状态的分子 B，一旦将 B，C 间的连接弹簧切断后便破坏了力的平衡状态，此时需寻找一个能保持 B 平衡状态而必需的力 S。如不切开，由于 B 处于平衡状态故与全然没加力的状态相似，故难以理解力 S 的存在。

Y 君在看了图 3.27 后似乎能接受。无论在 H 点或 I 点切开来观察，内力 $\boldsymbol{N}$ 总是存在的，这些点均处于力的平衡状态而与物体总体的外力平衡没有任何关系(图 3.27(e))。但是对这样支撑物体的点，该处的内力 $\boldsymbol{N}$ 必须与在该点支撑物体的外力(称为反力或支撑力，参照 2.3 节)$\boldsymbol{R}$ 平衡。若不平衡则支撑点会运动。很清楚，只要物体静止不动则外力(F，R 等)处于力的平衡状态。此外大家一定也已认识到，为研究物体内部产生的内力而将该部分切开是一个有效的方法。即由于内力本身在物体内部处于平衡状态，除了观察物体的变形或应变之外是无法从外部认识到内力的存在。但切开后，该截面成了新的边界，使切开前在该处存在的一组内力作为作用在物体边界的外力而显露出来，由此可以使人们确认其存在和大小。因此可以很恰当地称**内力为截面力**(图 3.28)。



图 3.28 为求内力可将物体切开，在切截面处考虑力的平衡。从“由于切断而产生的作用于截面上的力”的意义上，将内力称为截面力

[例题 1(A 级)] 如图 3.29(a) 所示两个人在推压一根杆。表示出地面、人、杆的受力状态。

解 问题很简单，但需设定坐标轴 x，y 求解。取坐标轴的正向为力的正向，取顺时针方向为力矩的正向。从 B 侧开始向 A 侧进行考察。

(1) B 侧的地面受到 B 君的脚产生的水平力 G_2 和垂直力 W_2。

(2) B 君受到地球引力即体重 W_B，地面的反作用 $-G_2$，$-W_2$，杆的推力 N_B 而保持静止，故处于外力的平衡状态，力平衡方程式成立。

水平方向的力平衡[②]

由 $\sum X = 0$，可得

$N_B + (-G_2) = 0$ 所以 $G_2 = N_B$

① 根据物体的形状和外力的施加方式，应变和内力一般是不均匀的，但肯定是在整个物体中产生。

② $\sum X=0$，$\sum Y=0$ 分别表示了式(3.13)对应于 x，y 方向力分量的平衡，而 $\sum M=0$ 则表示了式(3.18)所表示力矩分量的平衡。

垂直方向的力平衡

由 $\sum Y = 0$，可得

$$W_B + (-W_2) = 0, \quad W_2 = W_B$$

力矩的平衡

由 $\sum M = 0$，就 B 君脚的位置取力矩有

$$N_B h_B - W_B l_B = 0 \quad \text{所以} \quad N_B = \frac{l_B}{h_B} W_B$$

(3) 杆的端部受到 A 君、B 君的作用力 $N_A - N_B$。由 $\sum X = 0$，可得

$$N_A + (-N_B) = 0 \quad \text{所以} \quad N_A = N_B$$

很明显，$\sum Y = 0$，$\sum M = 0$ 自然成立。

杆的截面中产生的内力 N 如图 3.27(e) 所示。由于内力之间处于平衡状态，因此在力的平衡公式中不表现出来。为了使内力 N 显示出来，在 C 处切开断面，AC 处于静止状态故必满足力的平衡公式，由 $\sum X = 0$，可得 $N_A + (-N_C) = 0$，所以 $N_C = N_A$。取其它的杆段 CB，亦可通过 $\sum X = 0$，得到 $N_C = N_B$。在杆端 B 附近的 D 切开有 $N_D = N_B$，该结果表明杆端附近产生的内力（这里是 N_D）与外部作用在杆端的外力（这里是 $-N_B$）平衡。同时，$N(N_A, N_B, N_C, N_D)$ 为轴向的内力故称为轴力（图 3.29(c)）。

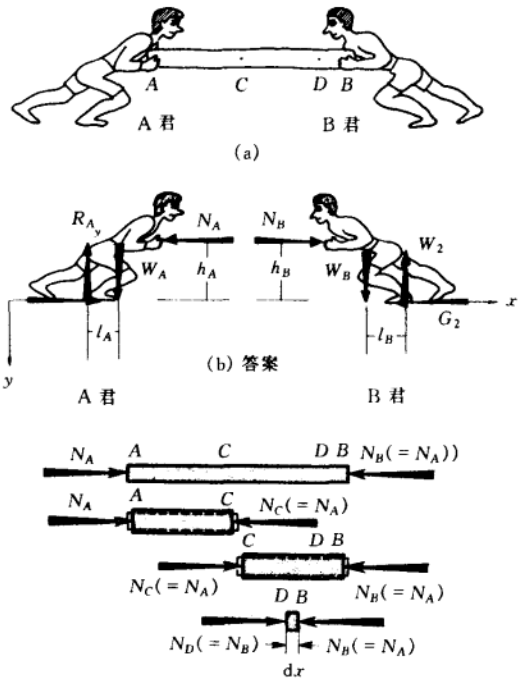


图 3.29 例题 1：求在推压杆时力状态及其关系的问题

(4) 关于 A 君的外力平衡及作用在地面上的力等，可仿效 B 君的情况进行分析（这里省略了说明，在 A 君、B 君的身体中、地基中也产生内力）。

[例题 2(A 级)] 如图 3.30(a) 所示，体重 W_A 的 A 君使用滑车想把质量为 W 的物体拉上去。滑车的绳子应能承受多大的力（认为滑车仅改变力的方向）。

解 A 君向下拉的力 T_A 不可能超过他的体重 W_A，因此

(1) 若 $W_A < W$，则 $T_A = W_A$，故物体拉不起来（图 3.30(b)）。

(2) 若 $W < W_A$，则 $T_A = W$，故物体可拉起来。

因此在绳子内产生的内力等于 W_A，W 两者中的小者，绳子的强度大于该内力即可。

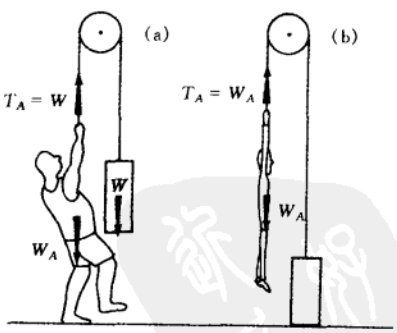
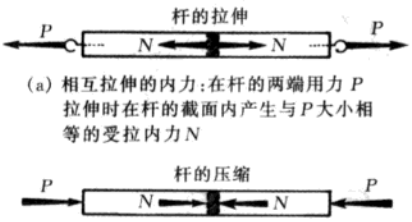


图 3.30 例题 2：滑车绳子所需的必要强度



3.3 内力的种类

杆受张拉后在杆中产生相互拉伸的内力（图 3.31(a)）。反之杆若受压则在杆中产生相互



(a) 相互拉伸的内力：在杆的两端用力 P 拉伸时在杆的截面内产生与 P 大小相等的受拉内力 N

(b) 相互压缩的内力：在杆的两端用力 P 压缩时在杆的截面内产生与 P 大小相等的受压内力 N

图 3.31　在杆的两端拉伸和压缩时在杆内产生的内力

压缩的内力(图 3.31(b))。那么若将杆的一端 A 固定(例如用混凝土将其一端固定等)，而在杆的另一端 B 施加与杆轴垂直的力 F，将会产生什么样的应力呢(图 3.32(a)，将这样的结构称为**悬臂梁**)。为了回答这个问题，使用求内力的常用方法，即切开来考虑(图 3.32(b))。在距离加力点 c 处的 C 点，截取与杆轴垂直的截面，在该截面上首先加上与杆垂直(沿截面的方向)的力 Q，因为若不保持 y 轴方向力的平衡，则 CB 部分将沿 y 方向运动。因此内力有以下关系

$$F+Q=0 \qquad \text{所以} \quad Q=-F$$

式中，负号表示 Q 为垂直向上的，如图 3.32(c) 所示。将这种沿截面作用的内力称为**剪切内力**[①](剪力)。

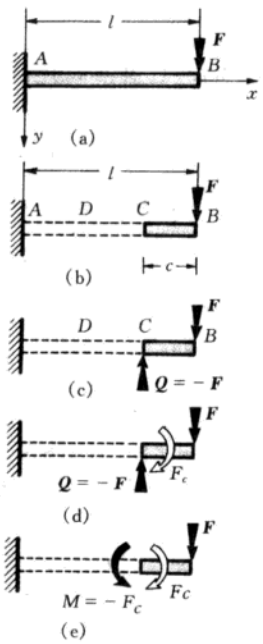


图 3.32　悬臂梁的自由端受垂直集中荷载 F 作用时产生的内力

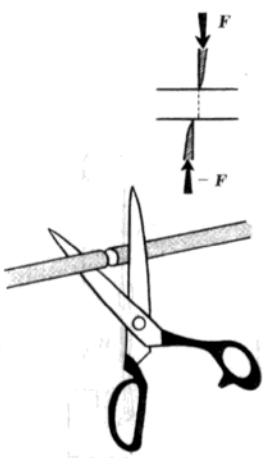


图 3.33　由于剪力与用剪刀剪断物体时所加的力相似故得名

在截面上由于没有沿杆轴方向的外力，故无内力产生。但是若力 F，Q 作用于 B，C 点，则 F 与 Q 形成力矩 Fc，CB 部分发生转动(图 3.32(d))。而实际上 CB 部分保持静止，因此在截面上应作用有与上述力矩平衡的力矩。为保持平衡而作用于截面上的力矩，即内力的力矩设为 M，由力矩的平衡式有(图 3.32(e)，力矩以顺时针方向为正)。

$$M+Fc=0 \qquad \text{所以} \quad M=-Fc$$

本例中 Q 值不论是在截面 C 处还是在截面 D 处均保持不变(图 3.32(c))。不论在何处均为 $Q=-F$。但 M 的值却随截面 C 与施力点之间的距离 c 而变化。在固定端 A 处的力矩根据 $c=l$，为 $M_A=-Fl$。如图 3.34(a) 所示，将坐标原点设在固定点 A，取杆轴为 x 轴并取与之垂直的方向为 y 轴，则内力 M 作为 x 的函数可表示为

$$M(x)=-F(l-x) \qquad 0\leqslant x\leqslant l \qquad (3.19)$$

① 剪切即指剪断，由于该内力与用剪刀剪开纸或布时的力相似，故称之为剪力(图 3.33)。剪力更准确的定义是“沿剪切面作用的力”。

内力的力矩称为**弯矩**。在图 3.34(b) 中绘出 x 与 $M(x)$ 的关系称之为**弯矩图**(或简单地称为力矩图、M 图)。

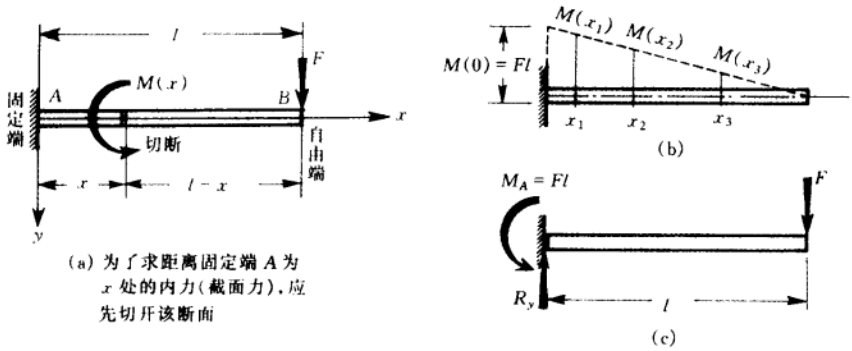


图 3.34 受垂直集中荷载 F 作用的悬臂梁中产生的弯矩(内力的一种)

在 $x=0$ 处即 A 点的 $M(0)$,由式(3.19) 可得 $M(0)=-Fl$。另一方面,可求得固定端 A 处的反力。根据力的平衡关系有

$$\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \qquad \text{所以} \quad R_x = 0,\ R_y = -F$$

$$\sum \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0} \qquad \text{所以} \quad M_A + Fl = 0 \qquad \text{所以} \quad M_A = -Fl = M(0)$$

式中 Fl 为外力 F 与反力 $R_y=-F$ 这样两个相互平行、大小相等方向相反的外力所产生的使物体发生转动的力矩(图 3.34(c))。

将已求得的内力进行对比可清楚地看出,将悬臂梁切开后作用在截面上的内力,在支承点处就是反力。本来这是很自然的结论,由于在支承点处存在作为外力的反力,故也存在内力。可将图 3.27 所示的微观考察方法直接推广到宏观。将悬臂梁在 $x=0$ 处切开,在 $x=\mathrm{d}x$ 处再次切开可得微元体,考虑它的外力平衡。由于微元体在切开以前处于静止状态,明显应满足平衡条件。因此,它必然处于图 3.35 所示的状态。作用在右侧截面(+侧截面)的力是由于右侧梁部分对之产生的作用。同时,左侧(−侧)的内力是由于反力的作用。故反力等于内力。

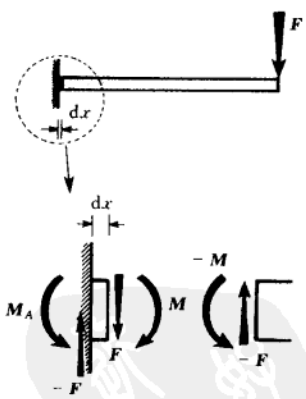


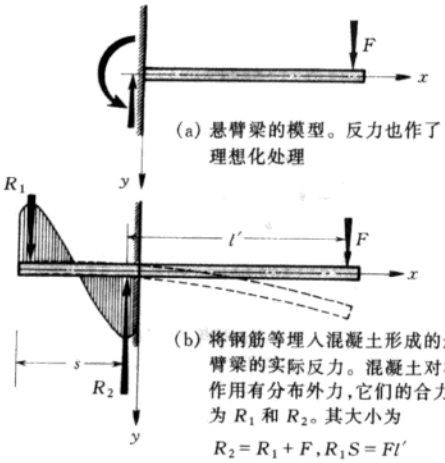
图 3.35 悬臂梁固定端处的反力 M_A 与内力 M 及反力 $-F$ 与内力 F 的关系。当然有 $M_A+M=0$,$(-F)+F=0$ 的力平衡式成立

本例表明,当在物体(本例为悬臂梁)上作用外力 F 时,为与此外力平衡,构成物体的分子间隔发生变化(即产生应变)而产生内力,该内力遍及整个物体内部直至支承点。在支承点处产生的反力与物体在支承点部分产生的内力大小相等。同时,该反力与作用在物体上的总外力平衡。

将杆一端埋入混凝土中而形成实际的悬臂梁,在外力 F 作用下产生的反力 R_y 与图 3.36(a) 所示模型的固定端不同,由于埋入部分与混凝土之间的微小变形而引起如图 3.36(b) 所示的反力。但是在多数的情况下,在悬臂梁部分的设计中采用固定支承的假定不会产生不合理的结果。此

外，梁本身的质量（自重，固定荷载之一）在设计中当然是应当考虑的，但除特别申明外这里暂且在计算中忽略自重。

为了观察反力和内力的关系曾在支承部分切出厚度为 $\mathrm{d}x$ 的微元体进行观察，现在为了观察内力之间的关系，在任意点 $x=x_1$ 处切出微元体进行考察。只是微元体厚度略比 $\mathrm{d}x$ 厚，设长度为 Δx_1（图 3.37(a)）。切出前的状态，在 $x=x_1$ 截面 RS 上除剪力 Q 外，由式(3.19)可知还有弯矩 $M(x_1)=-F(l-x_1)$ 的作用，而在 $x=x_1+\Delta x_1$ 截面 TU 上，有剪力 Q 和弯矩 $M(x_1+\Delta x_1)=-F[l-(x_1+\Delta x_1)]$ 的作用，因此微元体 $RSTU$ 在图 3.37(b) 的状态下处于力的平衡状态。



(a) 悬臂梁的模型。反力也作了理想化处理

(b) 将钢筋等埋入混凝土形成的悬臂梁的实际反力。混凝土对杆作用有分布外力，它们的合力为 R_1 和 R_2。其大小为 $R_2=R_1+F, R_1S=Fl'$

图 3.36　模型与实物反力的差异

这里就 R 点建立力矩的平衡方程

$$M(x_1+\Delta x_1)-M(x_1)+Q\Delta x_1=0 \tag{3.20}$$

令 $\Delta x_1\to 0$（令 Δx_1 趋向于 0），上式可写成

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{M(x_1+\Delta x_1)-M(x_1)}{\Delta x_1}=\frac{\mathrm{d}M(x_1)}{\mathrm{d}x_1}=-Q \tag{3.21}$$

根据式(3.20)，当 $\Delta x_1\to 0$ 时在微元体 $RSTU$ 的两个面上成对地作用着 $M(x_1)$。由式(3.21)可知，剪力与弯矩并非是任意的，它们之间有着深层次的关系，即弯矩对长度微分为剪力。

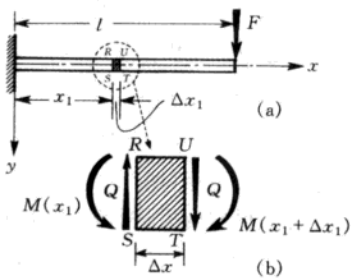


图 3.37　剪力与弯矩相互之间有着深层次的关系。即

$$\mathrm{d}M(x)/\mathrm{d}x=-Q(x)$$

由于作为内力的力矩 M 使物体弯曲，故称为弯矩。如图 3.38 所示，对杆施加扭转，为保持平衡在杆内也产生力矩 M。将这样的力矩称为扭矩（内力）。一般来说当物体作用有绕 x,y,z 各轴的外力矩时，相应地在物体内部产生绕 x,y,z 各轴的内力矩。例如在“一端作用有方向力的悬臂梁”中产生的力矩，由于是绕 z 轴的力矩，故记为 M_z。而如图 3.38 所示的扭矩由于是围绕 x 轴的力矩，故记为 M_x。由于该 M_x 为扭矩，有时也记为 T。

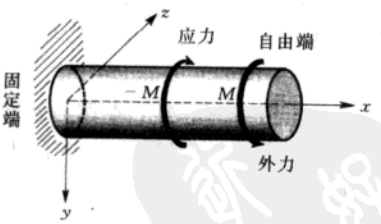


图 3.38　以杆轴（x 轴）为转动中心对梁施加转动的力矩，梁发生扭转并产生抵抗外力矩的内力力矩，称之为**扭矩**

当对悬臂梁施加的荷载 $\boldsymbol{F}$ 具有 x 方向的分量，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y=F_x\boldsymbol{e}_x+F_y\boldsymbol{e}_y$$

将产生大小等于 F_x、x 方向的内力（图 3.39(b)）称之为**轴力**或**轴向力**，一般记为 $\boldsymbol{N}$。

以上以悬臂梁为对象进行了考察，实际上对柱、梁等“杆状的物体（杆件）”可得到相同的定义，即**杆件的内力**可分为以下 3 类：

(1) **轴力**　（记为 N）。

(2) **剪力** (记为 Q)。

(3) **弯矩** (记为 M,有时将扭矩记为 T)。

表示杆件各部分产生的内力大小的图称为**内力图**。对 3 类内力 N,Q,M 可分别绘出 $\boldsymbol{N}$ 图(轴力图),$\boldsymbol{Q}$ 图(剪力图),$\boldsymbol{M}$ 图(弯矩图)(图 3.40)。在悬臂梁自由端作用有外力 $\boldsymbol{F}$ 时的内力图如图 3.39(b) ~ (d) 所示。它们的计算方法如下:将外力 $\boldsymbol{F}$ 分解为 $\boldsymbol{F}_x,\boldsymbol{F}_y$,例如在图上的 C 点切开根据截面右侧的杆件 CB 不动的平衡条件

$$\begin{aligned}\sum X &= 0\\ \sum Y &= 0\\ \sum M &= 0\end{aligned} \qquad (3.7')$$

计算在截面 C 处的力(X 即 N,Y 即 Q) 和力矩。

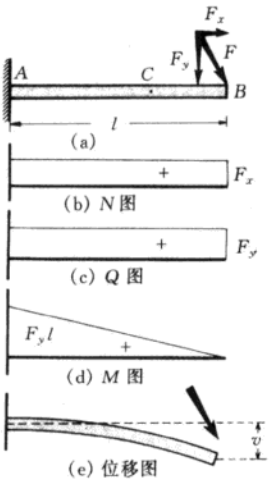


图 3.39 悬臂梁的自由端受到与杆轴斜交的力 $\boldsymbol{F}$ 作用的内力图

如图 3.37 所示切出微元体(图 3.41,RS 面相当于切断点 C),这次还加上了大小等于 $\boldsymbol{F}_x$ 的轴力 N。考虑 $\Delta x_1 \to 0$ 时的状态(图 3.41),可见包括了轴力 N、剪力 Q、弯矩 M 的**所有内力均成对地出现**并保持平衡。



图 3.40 "说到内力图则需画出 N,Q,M 图"

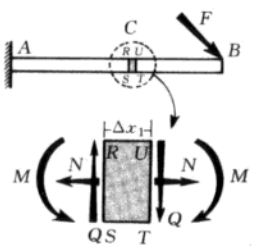


图 3.41 作为梁一部分的微元体 $RSTU$ 保持静止状态,内力应平衡。在本图中将之切出,把作用在切断面 RS,TU 上的内力看成外力作用。当 $\Delta x_1 \to 0$ 时,N,Q,M 均以大小相等、方向相反的力(或力矩) 成对出现

对成对存在的内力进行考察,例如考察可发现与图 3.31 的(a) 与(b) 明显不同。图 3.31(a) 中的微元体受拉,而图 3.31(b) 中的受压。对外力,由于它不成对,故可根据坐标轴符号的正负来表示力的方向。而对成对存在的内力,由于它们相互指向相反的方向,故无法再使用上述方法。因此在下节中将**规定内力的符号**,如取拉力(3.31(a)) 为正内力。



3.4 坐标系与内力的符号

材料力学、结构力学之所以难的理由之一是使用的坐标与符号不统一。例如,对重力的方向有人取坐标轴的正向也有人取负向;有人取顺时针方向作为正的角度推导公式也有人将之

作为负的角度推导公式；而且内力的正负也因人而异或因所研究的结构对象不同而不同，由于上述的不统一，使材料力学、结构力学体系十分混乱。这本身表明了力学体系的发展过程是颇耐人寻味的，因为它十分不便，所以本书中采用在数学和结构力学中应用最广泛的右手正交坐标系（图 3.42(a)，(b)，(c)），如2.4 节所述。这是因为考虑到数学与材力、结力有着十分深刻的联系，多数人已习惯于使用右手正交坐标系。角度和力矩也取一般的右旋规则，即从坐标原点出发向坐标轴正向的顺时针旋转方向为正。此外，对杆状的细长物体（杆件）取其长度方向为 x 轴，取垂直向下的方向为 y 轴，此时从纸外指向纸内的方向为 z 轴的正向。同时在不需要时，在图中仅标出两根轴而省略第三根轴（z 轴）。

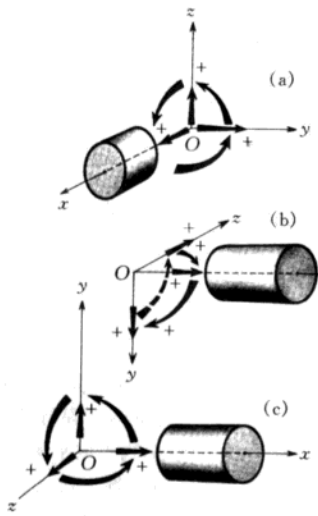


图 3.42 本书中使用右手正交坐标系。外力取坐标轴的正向为正。外力矩取 $x \to y, y \to z, z \to x$ 的方向为正

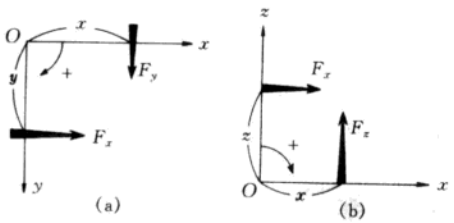


图 3.43 即使外力及其作用点的符号为正（+）其力矩却不一定为正。由于外力矩正向取为角度的正向，即

图（a）中有 $F_y x > 0, F_x y < 0$

图（b）中有 $F_z x < 0, F_z z > 0$

故需注意

在确定了使用的坐标系后还必须避免力与力矩关系中的混乱。设如图 3.43(a) 所示的力沿坐标轴（x, y 轴）的正向作用在物体上。由于它们到作用点的距离也为正，故 F_y 对原点的力矩 $F_y x$ 和 F_x 对原点的力矩 $F_x y$ 均为正，当按上述考虑方法判断应是没有问题的。但在实际上，考虑 $x-y$ 平面，由图 3.43 可见若取顺时针方向的力矩为正时，则 F_x 所产生的力矩为 $-F_x y$。同样如图3.43(b) 所示考虑 x, z 轴时，则 $F_z x$ 为负，$F_x z$ 为正。这样，力与力矩的符号关系对完全相同的现象却因坐标系取法的不同而得到不同的结果，这需引起注意[①]。在内力符号关系中也存在这样的现象，由于内力成对地出现使问题更加复杂。

内力的符号，对轴力（N）规定**受拉为正**。从物体中切出微元体，图 3.44、图 3.45 描绘了此时的状态。设在正面沿坐标正向作用的内力为正，即 N_+（同样在负面沿坐标负向作用的内力为正，即 N_-），这与受拉内力为正的规定相同。同样对剪力可规定为：正面沿坐标正向作用的 Q_+ 为正（同样在负面沿坐标负向作用的 Q_- 为正）。

① 将力矩作为位置向量 $\boldsymbol{l}$ 与力向量 $\boldsymbol{F}$ 的向量积 $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F}$ 来处理并用该积的坐标轴分量来表示，则该矛盾可解决。

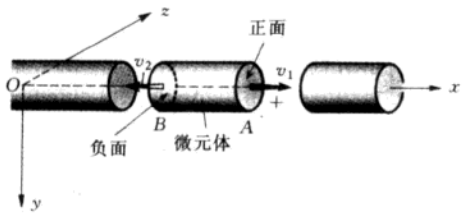


图 3.44 从微元体截面里侧指向外侧的法向向量 v_1，v_2 的方向决定了截面的正负。图中，v_1 与 x 轴的正(+)向一致而 v_2 与 x 轴的负向一致，故微元体截面 A 为正截面而截面 B 为负截面

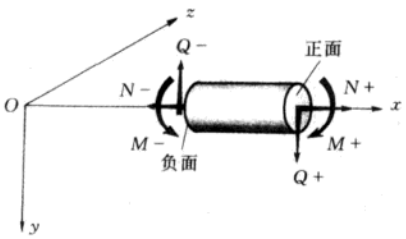


图 3.45 由于内力成对地存在形成平衡状态，故无符号。因此，内力的符号是人为规定(定义)的。规定在正面正向的内力或内力矩(因此还包括在负面负向的内力或内力矩)对为正(+)的内力。本定义与后文的转角法或三维问题中的定义一致，不会造成混乱

另一方面，如图所示取切出的微元体，对弯矩的符号规定在正面沿正转向的力矩对为正。这样，轴力、剪力、弯矩的符号均是人为地规定的，并无理论根据，而是取决于研究者。但如图 3.46(a) 所示的轴力和图 3.46(b) 所示的剪力的取法正逐渐在世界上得到统一。而图 3.46(c) 的弯矩符号却仍处于混乱状态，在日本习惯上对弯矩的符号并不计较，将图画在杆件的受拉一侧(而欧美则画在杆件的受压一侧，图 3.47)。日本画法的优点是弯矩图与梁的挠曲形状相似，而欧美的方法在根据坐标轴 x，y 确定符号方面容易理解。

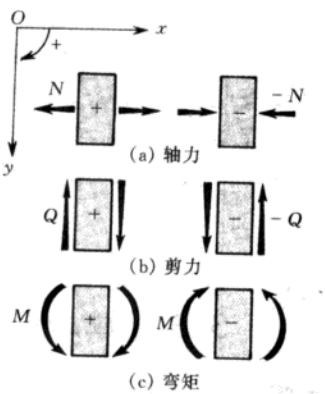


图 3.46 本书所定义的内力符号

在本书中取作用在正面的正向和负面的负向的力和力矩对为正，与欧美的定义相同。不过，为了与日本的习惯没有太大的矛盾且发挥日本记叙方法的优点，取 x 轴为水平方向且以右手方向为正，取 y 轴为

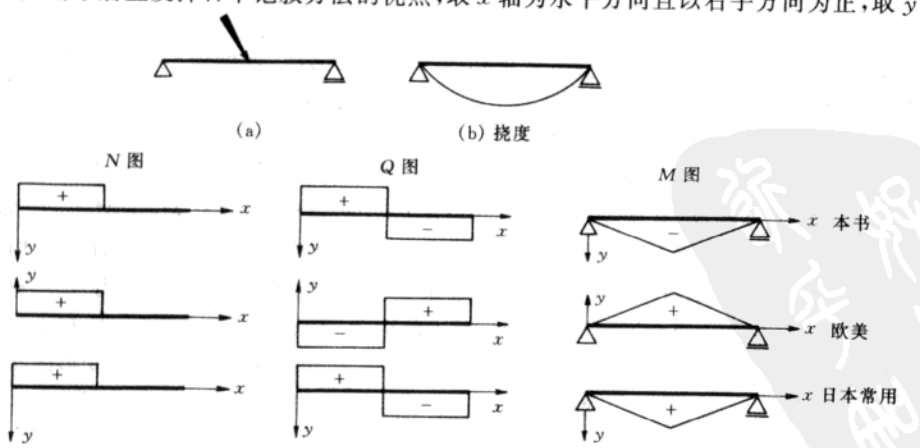


图 3.47 内力符号的取法与内力图画法的比较(N 图是各国通用的)

垂直向下(此时弯矩的正负与习惯相反。此外内力图中的正内力画于柱构件的右侧和梁构件的上侧。这样便与日本传统的内力图画法一致)。

作为一个例子,图 3.47 表示了简支梁的中部受到斜方向荷载作用时内力符号的取法及内力图的画法。

对一个结构设置一个固定坐标系称为**整体坐标**。本书中所有的例子均为整体坐标。此外尚有对构成结构的各构件为了方便求解而设置的坐标系,称为**局部坐标**或**构件坐标**。例如,图 3.48 所示的由柱和梁构成的门型刚架,取整体坐标为 X,Y,Z,此外还取构件 AB(柱)用的局部坐标 x,y,z 和构件 CF(梁)用的局部坐标 ξ,η,ζ。这样各构件的力学特性,即力与变形的关系、内力与应变的关系等可用沿杆轴方向的坐标轴(x 或 ξ)的基本形式来表示,然后只要机械地将该基本形式进行从局部坐标到整体坐标的**坐标变换**即可得到整体坐标系下构件的力学特性。由此可见,坐标变换也是在结构力学中利用率很高的重要方法。用于研究的各种物理量(例如力或应变等),无论坐标发生什么变化,表示坐标变换时共同性质的集合称为**张量**。如质量或能量这样的标量,如力或位移这样的向量,以及以后将要出现的应力或应变等,结构力学所处理的多数物理量均属于张量。

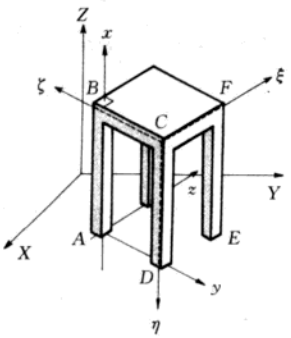


图 3.48 整体坐标和局部坐标(构件坐标)。在对柱或梁等各构件取最方便的局部坐标进行分析后,再通过坐标变换变换到整体坐标系



3.5 应力

如图 3.49(a) 所示,捏住橡皮的两端使其弯曲。为了施加力矩更加方便,也可如图 3.49(b) 所示那样在两端插上针然后加上力偶。这样做之后,使橡皮的上侧受压,产生皱折,反之使下侧受拉,产生开裂。而在上侧面和下侧面的中间,即橡皮的正中,一定存在既不受压也不受拉、既不伸长也不压缩的中性面(图3.49(c))。该中性面与橡皮的侧面(或截面)相交形成的线称为中性轴。关于中性面或中性轴位于何处这样一个今天看来很简单的问题,结构力学学者们为了正确地理解该问题却花了约 200 年的时间。

上述事项将在下一章(4.3 节)详细叙述,这里考察两端受弯矩作用的杆件(梁)中的内力。首先,为保持梁的整体平衡,在两端作用的弯矩(外力矩)必须平衡。故有 $M_A+M_B=0$,即 $M_A=-M_B(=-M)$。然后,为求梁内产生的内力,采用切开的方法进行考察,在负面上作用有大小等于 M 的正力矩,在正面上作用有大小等于 $-M$ 的负力矩,故产生了成对内力 —— 负弯矩(图 3.49(d))。这对任意取出的截面均一样,故绘出的内力图如图3.49(e) 所示(N,Q不存在)。

为更详细地研究弯矩图,在橡皮的侧面画上网格然后在两端施加弯矩,则其变形的状态更清楚(图3.50(a),(b))。为观察其上部、中间部分及下部网格变形状态的不同,在图 3.50(c) 中将其局部放大。根据虎克定律(1.3 节)—— 力越大变形越大,则在变形大的部分应作用有大的力。在图 3.50(c) 中将这样的内力用箭头画出。

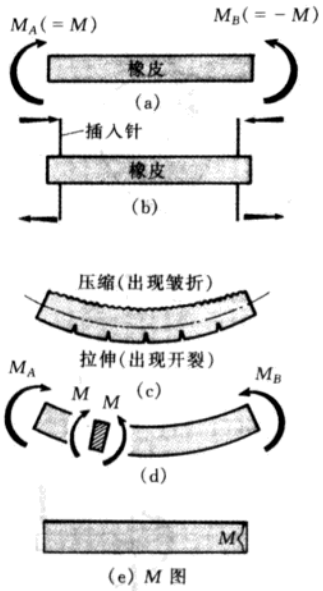


图 3.49 用橡皮进行梁的弯曲实验

(a) 在橡皮的两端施加力矩；

(b) 同样也可插上针施加力偶；

(c) 施加弯矩后，在一侧出现开裂说明该侧受拉，另一侧出现皱折说明该侧受压，中间既不伸长也不压缩的部分是中性轴；

(d) 切开进行考察，切片为保持平衡产生大小为 M 的弯矩；

(e) 因此可得弯矩为常量 M 的图形。

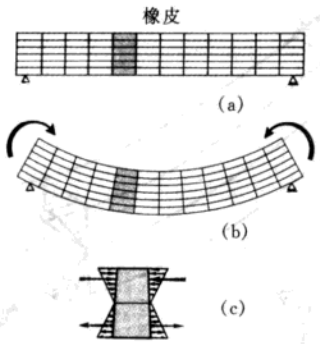


图 3.50 在橡皮的侧面画上如图(a)所示的网格后施加弯矩，如图(b)所示可清楚地看到橡皮的变形情况。根据变形的状态画出各网格处的内力可得如图(c)所示的内力图形

对上述受外力矩作用而产生弯矩的梁，若切出微元体并考察其内力，可清楚地看到内力是轴向(x 方向)力。不过该轴力的大小随位置不同而不同，在中线附近小并随着远离中线而逐渐加大，逐渐在上部形成大的**压缩内力**(反之在下部形成大的**拉伸内力**)，对梁截面总体而言形成了弯矩(图 3.51)。因此，在说到内力时，即指将作用于整个截面的力集合为一体的**截面力**，也指对截面进一步细分后作用在截面不同位置的内力。为避免混淆它们，这里引入**应力**的概念。

将网格分得越细、单元的尺寸越小，能更准确地反映截面某点的应力状态。这与在定义某时刻的车速时，取小的 Δt 并令 $\Delta t \to 0$ 的情况是一样的(参照 1.4 节)。因此可定义某一点的应力 s 为：在单位面积上产生的内力(参照 2.5 节)。

$$s = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A} \tag{3.22}$$

式中，ΔA 为微元面积，ΔP 为 ΔA 上产生的内力(图 3.52)。

常用 σ，τ 表示应力。s 相当于希腊文字 σ，t 相当于希腊文字 τ，来源于应力的单词 stress。常用 σ 表示正应力，τ 表示剪应力[①]。应力的单位是帕 Pa(N/m^2)，kgf/cm^2，tf/cm^2 等。

例如，截面积为 A 的杆件受到轴力的作用，一般假定正应力 σ 在截面内是均匀分布的，故应力可表示为

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{3.23}$$

① 正应力是指方向垂直于作用面的应力，轴向应力就是其中之一。剪应力是指方向平行于作用面的应力。

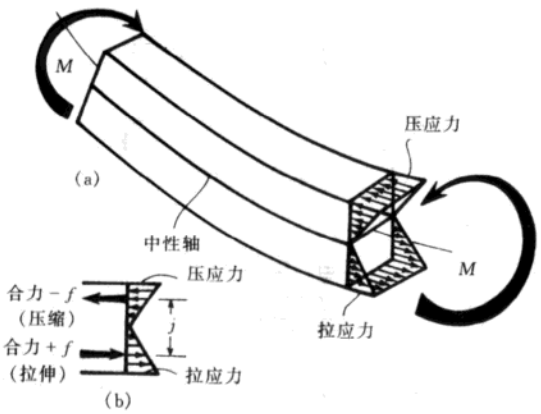


图 3.51　从截面总体来看是弯曲内力，但若对内力仔细观察它还分为受拉和受压内力，这些沿轴向的受拉或受压内力在截面上形成弯矩 $fj(=M)$(图(b))

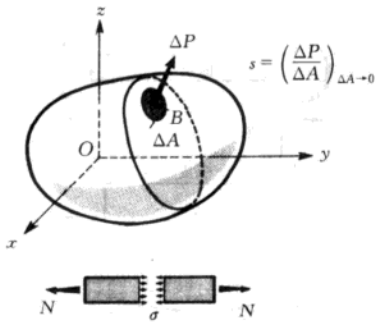


图 3.52　点 B 处应力 s 的定义

$$s=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A}$$

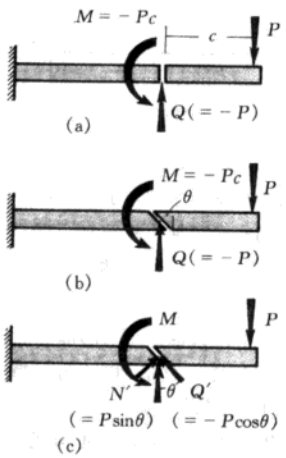


图 3.53　内力的分量(垂直与剪切内力)的大小随切面的不同而不同。在(a)中不存在垂直内力，当切面与轴倾斜时，在(c)中存在 $N'=P\sin\theta$。当然，即使同一处的应力也随切面的取法而发生变化

为求杆件应力而作的切面，一般取与杆轴垂直。由于将坐标系的 x 轴取为杆轴方向，故切面与 $y-z$ 平面平行。但有时也取切面与轴斜交。此时的截面内力与切面的方向无关，但将内力分解为垂直于切面的内力和沿切面的内力分量时，分量的大小当然随切面的方向而异(图 3.53)。

由于应力等于切面上的内力除以微元面积 ΔA，故随着切面方向的变化而得到不同的值。内力与应力在英语中是同一个单词 stress，但两者是不同的，特别在坐标变换时对两者(即使同为张量)需采用不同的方法处理。

从物体中切出正方形微元体(图 3.54)，在记叙正方体各面的应力时，需如图 3.55 所示加上脚标以区别它们是作用在哪个面上、什么方向的应力。前一个脚标表示作用面，后一个脚标表示应力的方向。面的名称用与该面垂直的坐标轴名来命名。例如，x 轴与 z 轴形成的面称为 y 面(在 y 面上的 y 坐标值为常数)。

此外在用 σ,τ 表示应力时，由于正应力 σ 的两个脚标，即作用面的名称与应力作用方向的名称一致，故一般只用一个脚标(例如 $\sigma_{yy}\to\sigma_y$)。为简化记叙，也常用 1,2,3 取代 x,y,z，例如用 τ_{12} 表示 τ_{xy}。

当然，将应力乘以其作用面的面积即为作用于该面的内力。例如，当在微元体上作用有体力[①]时，方向力的平衡公式可写为

① 作用在物体上的力中，有与物体接触、直接作用在物体表面上的力(面力)和不与物体接触、间接作用在物体上的力(体力)。体力包括了例如重力(万有引力)、离心力、电磁力等。

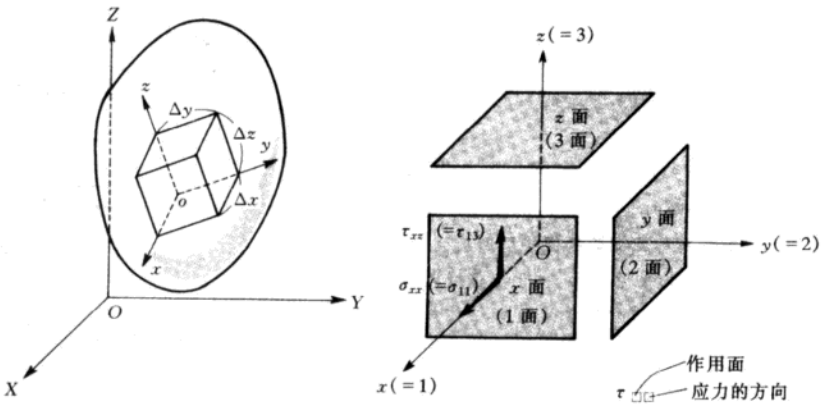


图 3.54 从物体切出包含 o 点的小正方体，该点的应力状态可用正方体各面的应力来表示。此时，为今后分析的方便，可将正方体的棱线取为局部坐标轴。作用于正方体各面单位面积上的内力分量大小(应力)，用作用面的名称、应力分量的方向为脚标来表示。例如，$\sigma_{xx}=\sigma_{11}=(\sigma_x=\sigma_1)$ 表示作用于 x 面沿 x 方向的正应力，而 $\tau_{xz}=\tau_{13}$ 表示作用于 x 面沿 z 方向的剪应力(沿面的应力)

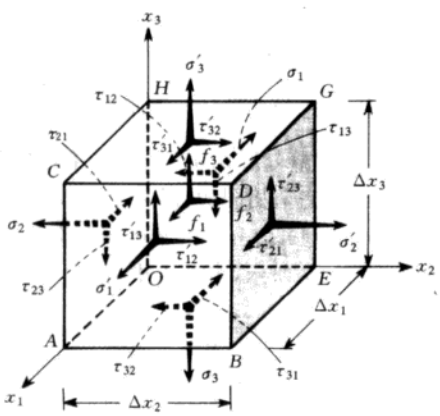


图 3.55 在微元体各个面上作用的应力

$$(\sigma'_y-\sigma_y)\Delta z\Delta x+(\tau'_{xy}-\tau_{xy})\Delta y\Delta z+(\tau'_{zy}-\tau_{zy})\Delta x\Delta y+f_y\Delta x\Delta y\Delta z=0$$

式中，f_y 为单位体力在 y 方向的分量。

若将坐标轴名称用号码表示($x\to 1, y\to 2, z\to 3$)时，有

$$(\sigma'_2-\sigma_2)\Delta x_3\Delta x_1+(\tau'_{12}-\tau_{12})\Delta x_2\Delta x_3+(\tau'_{32}-\tau_{32})\Delta x_1\Delta x_2+f_2\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3=0 \tag{3.24}$$

式中，f_2 为单位体力在 2 方向的分量。

式(3.24)在下节(3.6 节)中将改写成更简练的形式。

[例题 1(A 级)] 在混凝土梁的两端作用有外力矩。对之进行加固应在何处加入钢筋？

解 混凝土材料抗压较强但抗拉较弱。而钢筋材料抗压和抗拉均很强，但由于是细杆因此在轴向受压时

易屈曲(参照 1.8 节)。钢筋混凝土结构用钢筋加固抗拉较弱的混凝土,同时钢筋在受压时也由于周围混凝土的约束而不会发生屈曲。因此将钢筋放在**受拉侧**是有效的。而碱性的混凝土可防止钢筋生锈,还有防火效果。混凝土与钢筋的热膨胀系数也几乎相同,故不产生温度应力。

如图 3.56(b) 所示加入钢筋。一般,为了防锈、防火及使混凝土与钢筋粘结良好作为一个整体,在略靠内侧处而不在最边缘处放入钢筋(从边缘到钢筋的距离称为**钢筋的保护层厚度**)。

此外,对图 3.56(c) 所示的悬臂梁,由于上侧受拉故钢筋必须放在上侧。钢筋混凝土的雨棚或阳台的跌落破坏往往是由于将钢筋放在下侧所致(按日本的习惯将弯矩图画在受拉侧,故对钢筋混凝土较适合。而对屈曲问题较严重的钢结构,则适合用欧美方式,将弯矩图画在受压侧的,对上述两者只要习惯了,哪一种都可。

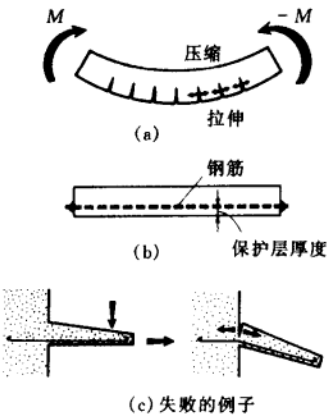


图 3.56 为加固混凝土放入钢筋



3.6 微分、泰勒展开、偏微分①

有人一听到微分与积分便会头疼,在 1.4 节中曾仔细地叙述过:微分可简单地理解为"减后相除",而积分可理解为"乘后相加",当 dx 趋于 0 时可将微分正确地理解为随 x 变化的 $f(x)$ 的斜率($=df(x)/dx$),将积分正确地理解为 $f(x)$ 的面积($=\int f(x)dx$)。在本节中,为了便于"对用 ∂ 代替 $df(x)/dx$ 中的 d 后的偏微分形式 $\partial f(x)/\partial x$ 不习惯"的读者理解,特说明如下:"本节中的 $df(x)/dx$ 与 $\partial f(x)/\partial x$ 是完全相同的。函数 f 不仅只是 x 的函数,当仅为 x 函数的只进行微分"。同时,由于取 1 项(或 2 项)微分项的泰勒展开会常出现,故在本节中说明。

x 函数 $f(x)$ 对 x 的微分如图 3.57 所示,可如下求得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\to\frac{df(x)}{dx}$$

(参照式(1.10))

在 1.4 节中已经叙述了 $[f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x$ 即 $\Delta f/\Delta x$ 是 $\tan\theta_\Delta$,当 Δx 趋于 0 的结果是:$df(x)/dx$ 为函数 $f(x)$ 在 x 处切线的斜率 $\tan\theta_d$。若在 x 处 $f(x)$ 的值与 $f'(x)$(将 $df(x)/dx$ 略记为 $f'(x)$)的值已知,则 $f(x+\Delta x)$ 的值,即图 3.57 的 $AB(=f(x+\Delta x))$ 可用 AC 作为其近似值

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x \qquad (3.25)^②$$

例如,设 $f(x)=2x^2$,当 $x=2$ 时 $f(x)=8$,由 $f'(x)=4x$ 可得 $f'(2)=8$。由此,当 $\Delta x=0.1$ 时 $f(x+\Delta x)$ 的值为

$$f(2+0.1)\approx f(2)+f'(2)\Delta x=8+8\times 0.1=8.8$$

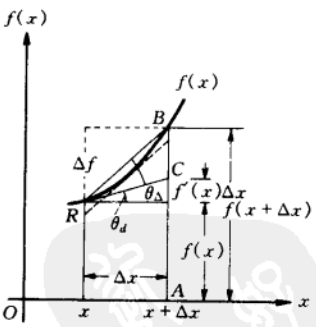


图 3.57 微分 $f'(x)=df(x)/dx$ 与 $f(x+\Delta x)$ 的近似公式 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$

① 已了解泰勒展开和偏微分的读者可跳过此节。

② 在 1.4 节的脚注中将 $(df(x)/dx)dx$ 称为微分。这里的 $f'(x)\Delta x$ 与此类似。

精确解为 $f(2.1)=8.82$，相对误差为$(8.82-8.8)/8.82=0.002\,3$即约为0.2%左右。因此，式(3.25)在求 $f(x+\Delta x)$ 近似值时是足够的。

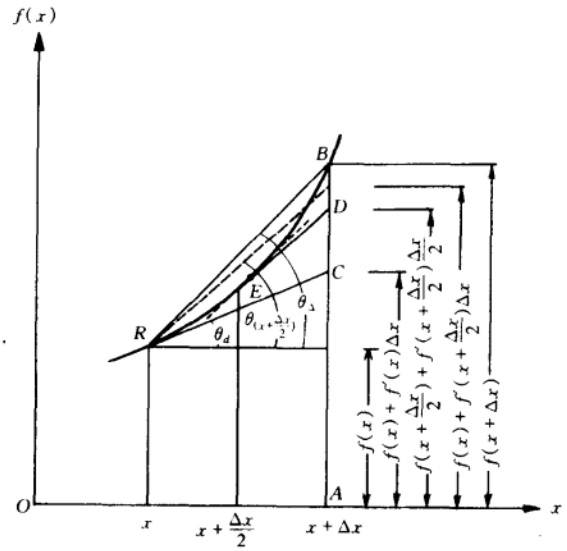


图 3.58 为了提高近似公式的精度，取中间点$(x+\Delta x/2)$处的斜率

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x+\Delta x/2)\Delta x$$
$$\approx f(x)+f'(x)\Delta x+f''(x)\Delta x^2/2$$

这样的近似在 Δx 越大时其相对误差会大幅增大。在上述的例中，当取 $\Delta x=0.5$ 时 $f(2+0.5)\approx 8+8\times 0.5=12$，而精确解为 $f(2.5)=12.5$，相对误差为4%。因此考虑还有没有更好的近似公式。将图3.57的一部分扩大可画出图3.58，有 $f(x+\Delta x)=f(x)+(\tan\theta_\Delta)\Delta x$(这是正确的公式而非近似公式)，$\tan\theta_\Delta$ 等于在 $f(x)$ 与 $f(x+\Delta x)$ 之间的曲线所引的切线 DE 的斜率[1]。因此，作为比式(3.25)更好的近似公式，取$(x+\Delta x)/2$处的斜率代替 $\tan\theta_\Delta$，可得

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x+\frac{\Delta x}{2})\Delta x \tag{3.26}$$

用 $f(x)=2x^2$ 进行考察，由于 $f'(x+\Delta x/2)=4(x+\Delta x/2)$

对 $\Delta x=0.1$ 可得 $f(2+0.1)\approx 8+4\times(2+0.05)\times 0.1=8.82$

对 $\Delta x=0.5$ 可得 $f(2+0.5)\approx 8+4\times(2+0.25)\times 0.5=12.5$

两者均等于精确值。这是由于偶函数 $f(x)=2x^2$ 数正好有以下关系

$$f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^2=2x^2+4x\Delta x+2\Delta x^2$$
$$=f(x)+4(x+\Delta x/2)\Delta x=f(x)+f'(x+\Delta x/2)\Delta x$$

所以才会出现近似值等于精确解，当函数的形式改变后式(3.26)和式(3.25)同样也是近似公式。不过式(3.25)仅使用了 x 处的函数值，而式(3.26)还使用了 $x+\Delta x/2$ 处的微分值，故有些不方便。因此可利用式(3.25)，用 x 处的函数值来表达 $f'(x+\Delta x/2)$，即对 $f'(x+\Delta x/2)$ 使用

[1] 在数学中称之为中值定理。

近似式 $f'(x+\Delta x/2)\approx f'(x)+f''(x)\Delta x/2$。这里的 $f''(x)$ 表示对 $f'(x)$ 再一次微分(参照式(1.11))。将上式代入式(3.26)可得

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x+f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} \tag{3.27}$$

该式的精度比式(3.25)好。在式(3.26)中的 $f'(x+\Delta x/2)$ 也用近似式(3.26)来表示,即 $f'(x+\Delta x/2)\approx f'(x)+f''(x+\Delta x/4)\Delta x/2$,这样可提高计算的精度。如果不断重复该过程,则得到数学上具有完整形式的泰勒展开式

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x)&\approx f(x)+f'(x)\Delta x+f''(x)\frac{\Delta x^2}{2}+f'''(x)\frac{\Delta x^3}{6}+\cdots \\ &\approx \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x)\frac{\Delta x^{(j)}}{j!} \end{aligned} \tag{3.28}$$

其精度和公式的形式均十分完美①。式中的 $f^{(0)}(x)$ 为 $f(x)$,$f^{(2)}(x)$ 为 $f''(x)$。$j!$ 为 j 的阶乘,即 $1\times2\times\cdots\times j(2!=1\times2=2,3!=1\times2\times3=6)$。不过 0!不等于 0 而定义为 1。

结构力学中处理的函数,不一定都是 $f(x)$ 这样的单变量函数,往往还有含有 n 个自变量的多变量函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。例如在物体内某一点的应力状态,是由 A 点的坐标 x,y,z(或 x_1,x_2,x_3)、时间 t、外力 $p_1,p_2,\cdots$ 等所确定的多变量函数。这里将研究此时的微分或泰勒展开。以前曾说过,对复杂的问题应尽量将问题简化并以此为线索来求解复杂问题,这是科学、特别是工程问题中广泛应用的方法。这里对多变量函数中最简单的两个变量函数 $f(x,y)$ 进行研究。x,y 与 $f(x,y)$ 的关系假定如图 3.59 所示(z 轴取为 $f(x,y)$ 的值)。设当 $x\to x+\Delta x,y\to y+\Delta y$ 时,$f(x,y)\to f(x+\Delta x,y+\Delta y)$。由图有

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+EF+HJ \tag{3.29}$$

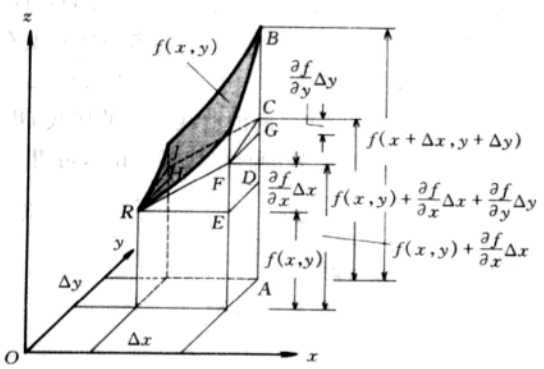


图 3.59 同样考虑变量为两个的函数。对 $f(x,y)$ 设 y 不变,它与 $f(x)$ 是一样的。

$f(x+\Delta x,y=$ 常数$)\approx f(x,y=$ 常数$)+f'(x,y=$ 常数$)\Delta x$

将 $f'(x,y=$ 常数$)$ 记为 $\partial f/\partial x$,上式可写为

$f(x+\Delta x,y=$ 常数$)\approx f(x,y=$ 常数$)+(\partial f/\partial x)\Delta x$

再考虑设 x 不变,同样地有

$f(x=$ 常数$,y+\Delta y)\approx f(x=$ 常数$,y)+(\partial f/\partial y)\Delta y$

将上述两者合并后有

$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+(\partial f/\partial x)\Delta x+(\partial f/\partial y)\Delta y$

对 EF,由于 y 值不变仅 x 值变化,此时与 y 为常数的单变量函数相同。近似地可由式(3.25)写出

$$EF=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f'(x,y)\Delta x$$

这里的 $f'(x,y)$ 为 y 值取常数仅对 x 微分。为了强调这一点,不能简单地写成 $\mathrm{d}f(x,y)/\mathrm{d}x$,而应该写成 $\partial f(x,y)/\partial x$ 或 $f_x(x,y)$。若 $x=a,y=b$,对 x 的偏微分可记为

① 该式的证明见卷末的附录。

$$(\partial f(x,y)/\partial x)_{(x,y)=(a,b)},\ \partial f(a,b)/\partial x,\ f_x(a,b)$$

另一方面对 HJ，首先由图可认为 $HJ \approx GC$，然后使用式(3.25)，近似地有

$$GC = f(x,y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

因此可将式(3.29)改写成

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \tag{3.30}$$

将此法进行推广，对一般含有 n 个独立变量的多变量函数，可写出

$$f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\cdots,x_n+\Delta x_n) \approx f(x_1,x_2,\cdots,x_n) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\Delta x_i$$

为了进一步提高精度，仍然可应用泰勒展开。

$$f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\cdots,x_n+\Delta x_n) \approx \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(j)} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{3.31}$$

由于公式很难理解，可作进一步的说明。将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 简单地记为 f，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(j)} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \left(\Delta x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{(j)}$$

例如 $n=2$，有

$$f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2) \approx f(x_1,x_2) + \frac{1}{1!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{(1)} f(x_1,x_2)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{(2)} f(x_1,x_2) + \cdots \approx f(x_1,x_2) + \frac{1}{1!}\left(\Delta x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\Delta x_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\Delta x_1\Delta x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \Delta x_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) + \cdots$$

实际上，对式(3.28)及式(3.31)的 j 只取1至2项而略去高次项，有时也取到第三阶。

取 $j=1$ 应用上节的式(3.24)。例如考虑 σ'_2 与 σ_2 相比仅是作用面错位了 $\Delta x_2(=\Delta y)$。因此，为用 σ_2 表示 σ'_2，利用式(3.31)可得(图3.60)

$$\sigma'_2 \approx \sigma_2 + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2}\Delta x_2$$

同样地有 $\tau'_{12} = \tau_{12} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}\Delta x_1$，$\tau'_{32} = \tau_{32} + \frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_3}\Delta x_3$，故式(3.24)可写成

$$\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_3} + f_2 = 0$$

(两边用 $\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ 除后)。对1方向和3方向可得同样的公式，将它们归纳后得

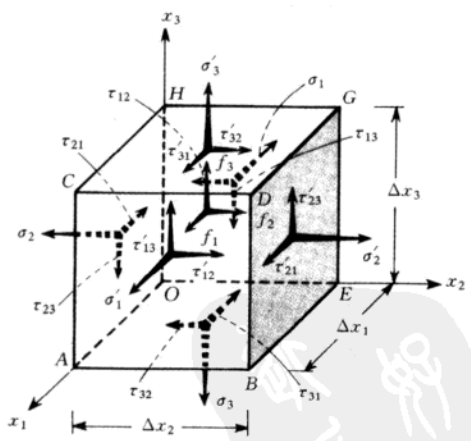


图 3.60 当 $\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3$ 很小时，作用在正方体(微元体)各个面上的应力大小近似为(例如 σ_2)

$$\sigma'_2 \approx \sigma_2 + \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2}\Delta x_2$$

同样对其它应力也利用近似公式来考虑力的平衡即可得式(3.32)的平衡方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_3}+f_1=0\\ \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_3}+f_2=0\\ \frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_3}{\partial x_3}+f_3=0\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

这个公式作为**应力之间的平衡方程式**，是最基本、最重要的公式。



3.7 应变

与定义单位面积上的内力为应力一样，称单位长度上的变形量为**应变**[①]。

如图 3.61 所示，对长度为 l、截面大小不变的杆件沿杆轴作用拉力(x 方向；x_1 方向；1 方向)，结果杆均匀伸长变为 $l+\Delta l$，相对于原长度 l 的变形量为 $(l+\Delta l)-l$，即 Δl，将**单位长度的伸长量**定义为**拉伸应变** ε_{xx}

$$\varepsilon_{xx}=\Delta l/l(=\varepsilon_{11}) \tag{3.33}$$

ε_{xx} 也称为垂直应变、正应变等。应变所用的脚标也与应力相同，第 1 个脚标表示作用面的名称，第二个脚标表示变形的方向。ε_{xx} 表示 x 面(1 面)沿 x 方向(1 方向)移动发生的应变。与正应力 σ_x 一样地可省略脚标，常写成 ε_x(或 ε_1)。

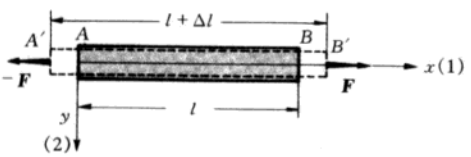


图 3.61 对直杆 AB(长度 l)作用拉力 F，杆伸长变为 $A'B'$(长度 $l+\Delta l$)。若此时杆的伸长为均匀伸长，则定义 x 面沿 x 方向的应为 ε_{xx} 为单位长度的伸长量

$$\varepsilon_{xx}=\Delta l/l(=\varepsilon_x=\varepsilon_{11}=\varepsilon_1)$$

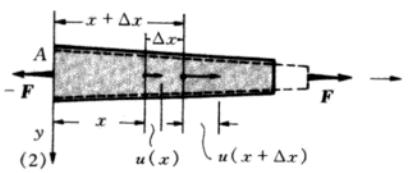


图 3.62 当杆的伸长为非均匀时，则应变 ε_{xx} 为位移 $u(x)$ 的微分即

$$\varepsilon_{xx}=\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x(=\varepsilon_{11}=\varepsilon_1)$$

当杆的伸长为非均匀时，即杆的各部分伸长比例不同，应按各部分定义应变。例如图 3.62 所示，该杆的截面大小随 x 变化，将一端 A 固定并作用力。设杆发生变形后，在距 A 端 x 处的点移动到 x'、距 A 端 $(x+\Delta x)$ 处的点移动到 $(x+\Delta x)'$。此时 x 点的位移为 $u(x)=x'-x$，同样 $(x+\Delta x)$ 点的位移为 $u(x+\Delta x)=(x+\Delta x)'-(x+\Delta x)$。根据上式，变形前相距 Δx 的两点 $x, x+\Delta x$ 变形后的距离变为

$$(x+\Delta x)'-x'=u(x+\Delta x)+(x+\Delta x)-u(x)-x$$

① 也有人将应变简称为形变。当称为形变时，它与变形为同义词，却往往不像变形这样有明确的物理意义，故容易引起混乱。所谓变形是指物体的形状与初始形状相比发生了变化，而位移是指物体内部的点发生了移动。若物体内部点之间的相对位移不是 0，即发生了变形。

$$= u(x+\Delta x) - u(x) + \Delta x$$

同样地，用变形量除以原来的长度即可求得应变，由关系

$$\Delta l \to [u(x+\Delta x) - u(x) + \Delta x] - \Delta x$$
$$l \to \Delta x$$

可得

$$\varepsilon_{xx} = [u(x+\Delta x) - u(x)]/\Delta x$$

令 Δx 趋于 0，有(参照 1.4 节)

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \quad (= \varepsilon_{11} = \varepsilon_1) \tag{3.34}$$[①]

该式是表示**位移与应变**关系的重要公式。对位移微分后可得应变，反之对应变积分后可得位移。

$$u(x) = \int \varepsilon_{xx}\,\mathrm{d}x + c \tag{3.35}$$

式中的 c 为积分常数。实际上成问题的就是该积分常数，若它不确定，即使物体内部各点的 ε_{xx} 已知也无法求得位移。对这一点，可假定应变为 0 的刚体发生移动的情况，即 $\int \varepsilon_{xx}\,\mathrm{d}x = 0$，而 $u = c \neq 0$。积分常数 c 表示刚体位移的量，需根据物体的支承条件(边界条件)来确定。

一般梁中除轴力外还有剪力或弯矩，故在两个方向上都有变形。对一个方向的长度为 Δx_1、另一个方向的长度为 Δx_2 的长方形进行考察(图 3.63(a))。设该微小的长方形 $ABCD$ 移动变形后成为 $A'B'C'D'$，根据图 3.50 所示的橡皮实验，可想象 $A'B'C'D'$ 已经不再是长方形。此外，直线 AB 在变形后变成曲线，因此用直线连接 A' 和 B' 也许是错误的，但由于长方形 $ABCD$ 是微小的，即使在变形后用直线连接 A'，B'，… 各节点，近似作为四边形 $A'B'C'D'$ 处理也无大的误差，是允许的。

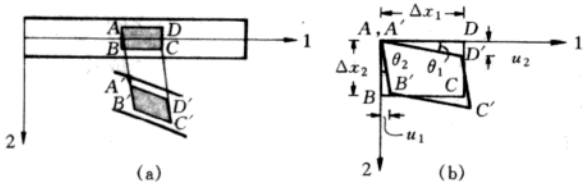


图 3.63

当变形不仅仅是 x 方向(1 轴)时，应变 $\varepsilon_{ij}\,(i,j = 1,2,3)$ 定义为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

令 A 和 A' 重合画出 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，如图 3.63(b) 所示。C 点相对移动到 C'(由于令 A 和 A' 重合故为相对位移，绝对位移为图 3.63(a) 的 $C \to C'$)。设 A 点的绝对位移为 $u(x_1, x_2)$，则 C 点的绝对位移由前节式(3.30) 可得

$$u(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) = u(x_1, x_2) + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2$$

在图 3.63(b) 中，$\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1$ 为 BB' 在 x_1 方向的分量 u_1，$\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2$ 为 DD' 在 x_2 方向

① 下文中坐标名用 x_1, x_2, x_3 或 1,2,3 代替 x, y, z。习惯后，这样的记法是很方便的。

的分量 u_2。因此，可重新定义应变

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \tag{3.36}$$

根据图 3.63(b) 所示的关系

$$\theta_1=\frac{u_2}{\Delta x_1}=\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1},\quad \theta_2=\frac{u_1}{\Delta x_2}=\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$$

可得

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2) \tag{3.37}$$

进而可将式(3.36) 更一般化地写成

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.38}$$

当 $i=j=1$ 时，该式与式(3.34) 为同一公式，它是表示位移与应变关系的一般公式。当 $i\neq j$ 时，由式(3.37) 可清楚地看出它是“变形中表示角度变化的量”(为无量纲值)[①]，称之为剪应变。

式(3.38) 是在后文中经常出现的重要公式。在工程上还常常使用满足以下关系的 γ_{ij} 来代替 ε_{ij}。

$$\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij}\quad (i\neq j) \tag{3.39}$$



3.8 应变与应力的关系 —— 本构方程

在 2.5 节中，曾给出了

$$E=\sigma/\varepsilon \quad 或 \quad \sigma=E\varepsilon \tag{前文 2.1}$$

它是结构力学中重要的公式。该公式是表示正应力与正应变之间的关系，E 为由材料确定的**材料常数**之一(参照表 2.1)。若 E 值与 ε 无关、保持常数，则 σ 与 ε 成比例关系，结果是力与位移也成比例关系。这就是虎克定律(参照 1.3 节)。

剪应力 τ_{ij}(i 表示作用面，j 表示力的作用方向。$i\neq j$。) 和剪应变 ε_{ij}(i 平面 j 方向的应变) 之间同样有下述比例关系

$$\tau_{ij}=(2G)\varepsilon_{ij}=G\gamma_{ij} \tag{3.40}$$

称 G 为**剪切弹性模量**(单位与 E 相同为 Pa，kgf/cm^2，tf/cm^2)。

式(2.1)、式(3.40) 均是在 ε 很小的范围内才成立，称该范围为**线性范围(比例极限内)**。在线性范围内，E，G 同样是由材料确定的。钢材直到屈服点附近($\varepsilon\approx 0.1\%$)，比例关系仍成立，而铝在 $\varepsilon\approx 0$ 附近 E，G 就已是 ε 的函数，应力和应变之间的关系不成比例。

这样，应力和应变之间的关系一般是根据材料的特性而定，将这样的关系称为**本构关系**。式(2.1)、式(3.40) 均为本构方程。

① 无量纲量为不具有长度、质量、时间等或由它们组合成的物理单位，例如角度、比率等即为无量纲量。



3.9 单位

当人们研究力、力矩、功、能量等的大小时，需对它们预先确定统一的单位。这与语言相似，过去在不同的国家和地区使用不同的单位，即使在同一国家、同一地区，只要专业领域不同使用的单位也不同。由于这样的状况造成了很多不便，因此在1960年的国际度量衡总会上，制定了超越国界、超越所有专业领域、使用统一的**国际单位制**(SI)[①]。但是，直到现在，在各专业领域内仍沿用过去惯用的单位。由于SI的构成极其合理，这里将SI与工程上惯用的单位进行比较和说明。

SI由7个基本单位(长度、质量、时间、电流、热力学温度、物质的量[②]、发光强度)和2个辅助单位(平面角、立体角)所构成，并用它们的组合来表示若干物理量(组合单位)，如力或功等共19个单位命名了固有名词。但是，当不同的专业使用共同的单位时，对不同的对象可能在数字的前后出现大量的0。例如，长度的单位是m(米)，但为了表示宇宙的大小需加上27个0，反之对电子的直径等需在数字前加16个0。为了避免这样的情况，可使用10的整数倍作为接头词。例如，1 000m用1 km(千米)，0.001m用1 mm(毫米)，这些都是广泛使用的单位词头，如表3.1所示。

表3.1 接头词

倍数	名称	符号	倍数	名称	符号
10^{18}	艾	E	10^{-1}	分	d
10^{15}	拍	P	10^{-2}	厘	c
10^{12}	太	T	10^{-3}	毫	m
10^{9}	吉	G	10^{-6}	微	μ
10^{6}	兆	M	10^{-9}	纳	n
10^{3}	千	k	10^{-12}	皮	p
10^{2}	百	h	10^{-15}	飞	f
10^{1}	十	da	10^{-18}	阿	a

与力学有关的SI单位如表3.2所示。同时它们与结构力学中常用单位的换算关系如表3.3所示。

① SI为System International d'Units的第一个字母。

② 所谓物质量是指在一个体系内存在的物质的量，单位使用摩尔(mol)。1摩尔定义为：取等于0.012 kg的碳元素^{12}C中存在的原子数的元素粒子(的集合体)所构成的体系的物质的量，在本书范围内将不使用该量。

表 3.2 结构力学中使用的单位

	量	名称	记号	定义
基本单位	长度	米	m	用光的波长定义
	质量	千克	kg	国际千克原器的质量
	时间	秒	s	放射持续时间
	热力学温度	开尔文	K	将摄氏温度(℃)减去 273.15 所得的绝对温度
辅助单位	平面角	弧度	rad	半径 r 的圆周上截取长度为 r 的弧作二条半径所夹的平面角
	立体角	立体弧度	sr	半径 r 的球面上截取 r^2 面积的所构成的立体角
组合单位	力	牛顿	N	$m \cdot kg/s^2$[(质量)×(加速度)]
	压力、应力	帕斯卡	Pa	$= N/m^2$(单位面积上的力)
	能量 功 热量	焦耳	J	$= N \cdot m$
	功率	瓦特	W	$= J/s$
	频率	赫兹	Hz	$= s^{-1}(= 1/s)$
	力矩	牛顿-米	N·m	
	热容量 熵	焦耳 / 开尔文	J/K	
	分布荷载 表面力	牛顿 / 米	N/m	
	面积	平方米	m^2	
	体积	立方米	m^3	
	速度	米 / 秒	m/s	
	加速度	米 / 秒^2	m/s^2	
	角速度	弧度 / 秒	rad/s	
	角加速度	弧度 / 秒^2	rad/s^2	

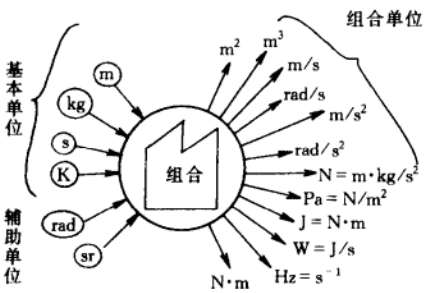


表 3.3 结构力学中常用单位的换算(括号内为简化的换算率)

	SI	惯用单位		
1. 力	N(牛) 1 1×10^{-5} 9.806 65(≈ 9.8) 4.448 22(≈ 4.45)	dyn(达因) 1×10^5 1 $9.806\ 65 \times 10^5$(≈ 9.8×10^5) $4.448\ 22 \times 10^5$(≈ 4.45×10^5)	kgf(千克力) $1.019\ 72 \times 10^{-1}$(≈ 1.02×10^{-1}) $1.019\ 72 \times 10^{-6}$(≈ 1.02×10^{-6}) 1 4.536×10^{-1}	lbf(磅力) 2.248×10^{-1}(≈ 2.25×10^{-1}) 2.248×10^{-6}(≈ 2.25×10^{-6}) 2.205 1
2. 应力 压力	Pa(帕) 1 $9.806\ 65 \times 10^4$(≈ 9.8×10^4) 1×10^5 6.895×10^3(≈ 6.9×10^3)	kgf/cm^2 $1.019\ 71 \times 10^{-5}$(≈ 1.02×10^{-5}) 1 1.019 71 (≈ 1.02) 7.031×10^{-2}(≈ 7.0×10^{-2})	bar(巴) 1×10^{-5} $9.806\ 65 \times 10^{-1}$(≈ 9.8×10^{-1}) 1 6.895×10^{-2}(≈ 6.9×10^{-2})	lbf/in2 1.450×10^{-4} 1.422×10(≈ 1.4×10) 1.450×10 1
3. 功 能量 热量	J(焦) 1 9.806 65(≈ 9.8) $4.186\ 05 \times 10^3$(≈ 4.2×10^3) 1.356(≈ 1.36)	kgf·m(千克力米) $1.019\ 7 \times 10^{-4}$(≈ 1.02×10^{-4}) 1 $4.268\ 58 \times 10^2$(≈ 4.3×10^2) 1.383×10^{-1}(≈ 1.4×10^{-1})	kcal(千卡) 2.389×10^{-4}(≈ 2.4×10^{-4}) $2.342\ 7 \times 10^{-3}$(≈ 2.3×10^{-3}) 1 3.239×10^{-4}(≈ 3.2×10^{-4})	ft·lbf(英尺磅力) 7.376×10^{-1}(≈ 7.4×10^{-1}) 7.233(≈ 7.2) 3.087×10^3(≈ 3.1×10^3) 1

续表 3.3

	SI	惯用单位		
	1J = 1×10^7(尔格)			
4. 功率	kW(千瓦) 1 $9.806\,65\times10^{-3}$($\approx9.8\times10^{-3}$) 4.186 05(≈4.2) 1.356×10^{-3}($\approx1.36\times10^{-3}$)	kgf·m/s $1.019\,7\times10^2$($\approx1.02\times10^2$) 1 $4.268\,58\times10^2$($\approx4.3\times10^2$) 1.383×10^{-1}($\approx1.4\times10^{-1}$)	kcal/s 2.389×10^{-1}($\approx2.4\times10^{-1}$) $2.342\,7\times10^{-3}$($\approx2.3\times10^{-3}$) 1 3.239×10^{-4}($\approx3.2\times10^{-4}$)	ft·lbf/s 7.376×10^2($\approx7.4\times10^2$) 7.233×10^{-3}($\approx7.2\times10^{-3}$) 3.087×10^3($\approx3.1\times10^3$) 1
5. 速度	m/s 1 2.778×10^{-1}($\approx2.8\times10^{-1}$) 1×10^{-2} 4.470×10^{-1}($\approx4.5\times10^{-1}$)	km/h(时速 — 千米 / 时) 3.6 1 3.6 1.609(1.6)	kine(cm/s) 1×10^2 2.778×10($\approx2.8\times10$) 1 4.470×10($\approx4.5\times10$)	mile/h(时速 — 码 / 时) 2.237($\times2.2$) 6.214×10^{-1}($\approx6.2\times10^{-1}$) 2.237×10^{-2}($\approx2.2\times10^{-2}$) 1
6. 角速度	rad/s 1 1.745×10^{-2} 1.047×10^{-1}	(°)/s 5.730×10 1 6	rpm 9.549 1.667×10^{-1} 1	
7. 加速度	m/s^2 1 1×10^{-2}	gal(cm/s^2) 1×10^2 1		
8. 长度	m 1 2.54×10^{-2} 3.048×10^{-1}($\approx3\times10^{-1}$)	in(英寸) 3.937×10($\approx3.9\times10$) 1 12	ft(英尺) 3.281(≈3.3) 8.333×10^{-2} 1	
9. 质量	kg 1 1×10^3 $4.535\,9\times10^{-1}$($\approx4.5\times10^{-1}$)	ton(吨) 1×10^{-3} 1 4.536×10^{-4}	lb(磅) 2.204 62(≈2.2) $2.204\,62\times10^3$ 1	
10. 密度	kg/m^3 1 1×10^3 $2.768\,0\times10^4$($\approx2.8\times10^4$) 1.602×10($\approx1.6\times10$)	g/cm^3(克 / 立方厘米) 1×10^{-3} 1 $2.768\,0\times10$($\approx2.8\times10$) 1.602×10^{-2}($\approx1.6\times10^{-2}$)	lb/in^3(磅 / 立方英寸) 3.613×10^{-5} 3.613×10^{-2} 1 5.787×10^{-4}	lb/ft^3 6.243×10^{-2} 6.243×10 1.728×10^3 1

过去在工程常用的单位中，质量和力是混用的。例如：kg(质量单位)，kgf(力单位)。但在力的单位中也将 kgf 简化而写成 kg。除了振动问题，在土木建筑的结构中不存在将质量作为重量(力的一种)的问题，故即使混用也不要紧。在本书中，当不会发生混乱时，允许使用 gr，kg，t 表示力而不一定写成 grf，kgf，tf。



第 3 章的总结：

以结构力学的基本原理 —— 力的平衡公式

$$\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \quad \sum \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}$$

为出发点，学习了力向量图和力多边形的画法。同时理解了为与外力平衡而在物体内产生的成对的力即内力。该内力是由于变形而产生的，故第 2 章叙述过的应力与应变之间存在 $\sigma = E\varepsilon$ 的关系就更明确了，将之推广可得 $\tau = G\gamma$。用 N，Q，M 图来表示杆件的内力状态是重要的。复习了必要的数学知识 —— 偏微分和泰勒展开。



第 3 章练习题

[力、力矩的平衡、力向量图、力多边形]

3.1 在图 3.64 的 A 点处应加上怎样的力和力矩才能与作用在物体上的外力平衡。(A 级)

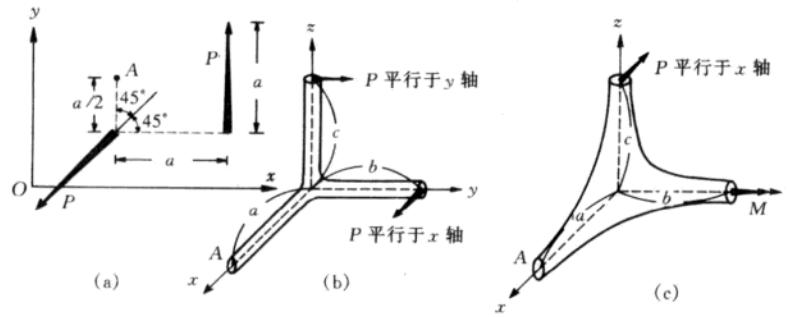


图 3.64

3.2 将图 3.65 所示的多个力矩合成为一个力矩。(A 级)

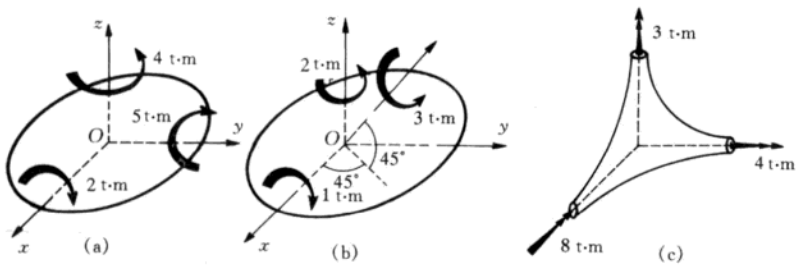


图 3.65

3.3 将图 3.66 所示的作用在物体上的力换算成位于原点的等价力与力矩。(A 级)

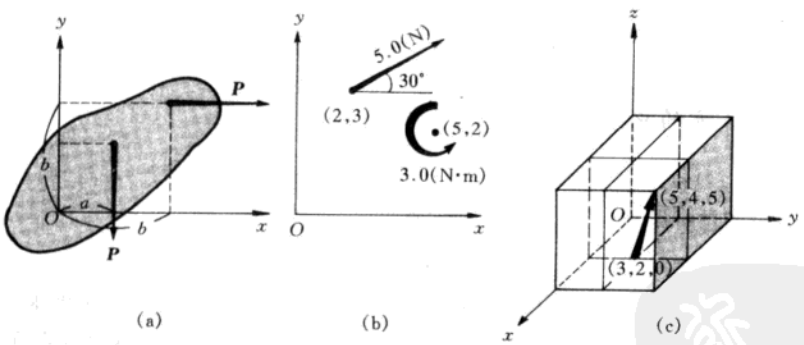


图 3.66

3.4 图 3.67 为平面结构(桁架)受雪－风－地震力各种荷载作用时(图(a)～(c))的分析模型(图(a′)～(c′))。对模型化的荷载画出力多边形并求 A,B 点的反力。这里设 A,B 点水平方向的反力大小相等。(B 级)

3.5 用 1N 的力 F 对如图 3.68(a) 所示的长度为 20 cm 的均匀杆作用轴向拉力后,杆伸长 1 mm。然后如图 3.68(b) 所示将杆切成两截,在其间用长 3 cm 的弹簧连接,然后用同样 1N 的力 F 拉伸,此时总体伸长 1 cm。当如图 3.68(c) 所示将杆切成 4 截,在其间插入与图 3.68(b) 一样的 4 个弹簧,然后再用 1N 的力拉伸,此时伸长了几厘米。(A 级)

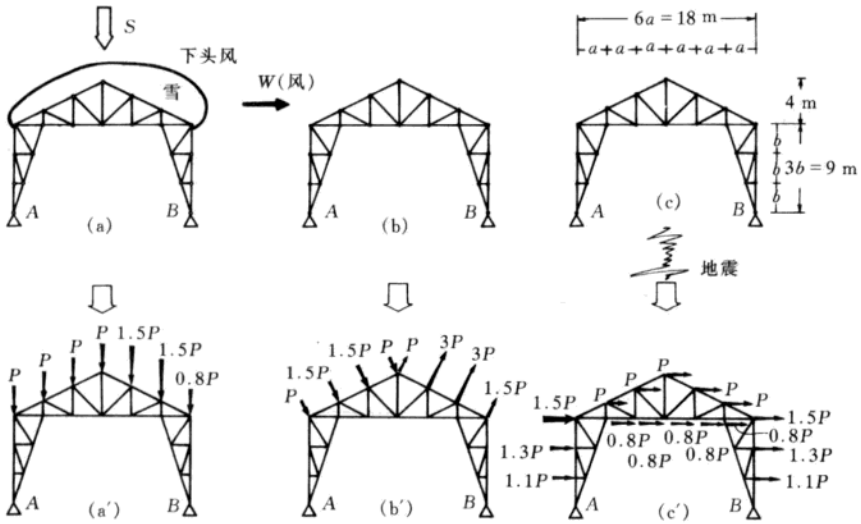


图 3.67

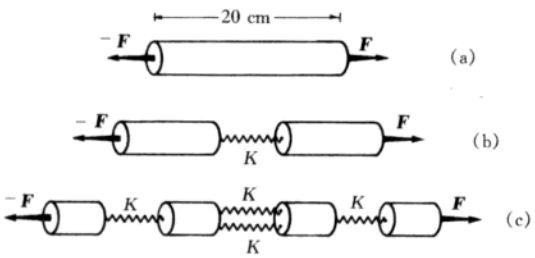


图 3.68

3.6　如图 3.69 所示，用弹簧常数为 $K = 1$ kN/cm 的弹簧吊住 $W = 10$ N 的重锤。想制作与该弹簧等价（对同样的力有相同的伸长）的圆杆，该材料的弹性模量为 $E = 2.0\times10^{-1}$ Pa$(= \mathrm{N/m^2})$。此时圆杆的直径应为几厘米，设圆杆的长度为 20 cm。同时，为使该圆杆能吊住重锤，该材料必须的强度为多少。(A 级)

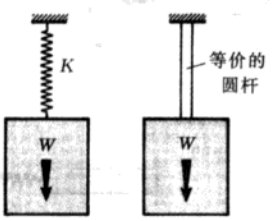


图 3.69

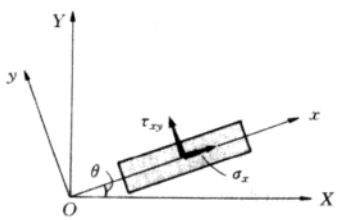


图 3.70

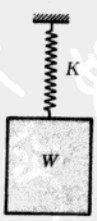


图 3.71

3.7　将杆件坐标系给出的应力 σ_x，τ_{xy} 用总体坐标系来表示(图 3.70)。(A 级)

3.8　如图 3.71 所示，用弹簧吊住的重物振动周期为 T，可忽略弹簧的质量和空气的阻力

$$T = 2\pi\sqrt{m/K}$$

m 为重物的质量，K 为弹簧常数，T 的单位为秒。计算当重物的重力为 2 kgf，弹簧常数为 1 kN/m 时的振动周期。设重力加速度为 $g = 980\ \text{cm/s}^2$。(A 级)

[轴向变形引起的应力，变形]

3.9　求圆柱变截面杆在任意点 x 处的位移 u_x(参照图 3.72)。设截面积 $A(x)$ 为给定的，弹性模量为 E。(B 级)

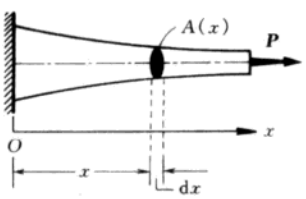


图 3.72

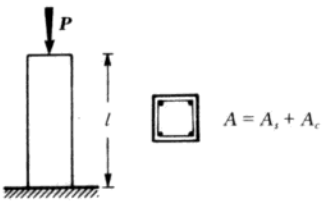


图 3.73

3.10　求钢筋混凝土柱在轴力 P 作用下，在混凝土和钢筋中产生的应力(图 3.73)。(B 级)

	混凝土	钢筋
截面积	A_C	A_S
弹性模量	E_C	E_S

3.11　对图 3.74 所示的钢管混凝土作用 10 t 的轴力，其压缩量为多少。(B 级)

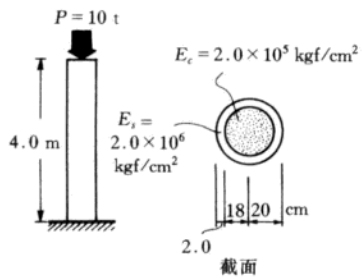


图 3.74

3.12　对图 3.75(a) 所示的组合杆件作用荷载 P 时，其变形特性应如何表示，用图表示 $P-\delta$(荷载-变形)关系。这里各种材料的应力-应变特性如图(b) 所示。(C 级)

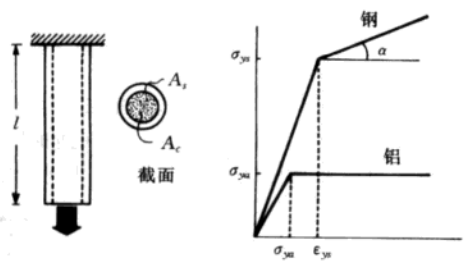


图 3.75

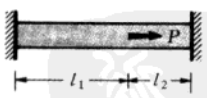


图 3.76

3.13　如图 3.76 所示，在两端固定的杆中间作用有杆轴方向的外力，求在杆的 l_1 部分和 l_2 部分产生的应力和应变。设杆的截面积为 A，弹性模量为 E。(B 级)

3.14　对图 3.77 所示一端用弹簧支承的悬臂梁，计算当温度提高 T℃ 时产生的应力和伸长量。设梁的截面积、弹性模量、线膨胀系数分别为 A、E、α，弹簧常数为 k。(B 级)

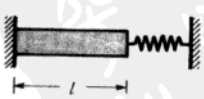


图 3.77

4 杆系结构的结构力学

第4章的内容：实际上第4章和下面第5章学习的内容是结构力学的主要内容，在大学、大专等需要2到3年才能学完。其要点有3点：

(1) 在杆系结构中有的结构不需要考虑变形仅由力的平衡便可求得内力，即静定结构。

(2) 其他所有杆系结构(超静定结构)，可基于梁的基本公式$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}$来求解。

(3) 即使是作为杆系结构来考虑的细长杆，其截面的应力也不是均匀分布的。

此外，在过去，对本部分的内容需要2到3年才能学完，即使这样仍不能很好理解的原因是由于没有注意到如此丰富内容的要点仅为上述3点。在本书中，将上述内容归纳为两章来叙述。其中的第4章说明了静定结构的解法和梁的基本公式推导。特别是4.2节尽管很短，但却是理解结构力学精髓最好的一节。



4.1 静定结构

在上一章中已叙述了："受外力作用的物体发生变形，在物体内部产生**形变**，由此便产生了**内力**，切开任意截面其内力和外力保持平衡"。由此，可以设想由于外力在杆件内引起的内力可根据杆件的变形来计算。事实上，对弹性体而言，**只要知道了变形即可求得内力**。因此，求外力作用下杆件的变形就成了结构力学的目标之一。但是，也有比较简单的——更准确地说，是"用简单的模型来模拟"——结构，对它只要简单地考虑力的平衡就可以计算出内力来。将这样的结构称为**静定结构**。因此力的平衡方程(式(3.7))就成为求静定结构内力唯一需要的公式[①]。

① 当然可通过变形计算来求静定结构内力。此外，由于变形本身也往往会带来问题(例如，由于结构的变形引起玻璃破碎等)，此时即使对静定结构也不能仅由力的平衡公式来计算变形，而必须借助于变形与内力的关系公式。

外力平衡公式用向量来表示为两个，而当用分量来表示时，对平面结构为3个（$\sum X=0$，$\sum Y=0$，$\sum M_Z=0$），对空间结构需再补充3个（$\sum Z=0$，$\sum M_X=0$，$\sum M_Y=0$）共计6个。因此，在求解比较简单的结构时，当未知数个数等于力平衡方程式的个数时，则可不考虑变形而直接求解（静定结构）。当然此时考虑变形进行求解是可以的，也许在理论上这样做反而更明确。但由于计算比较繁琐，只有当使用计算机时或研究特殊变形的场合下才这样做。

下面来考察**平面结构**——可用平面模型来表示的结构[①]。

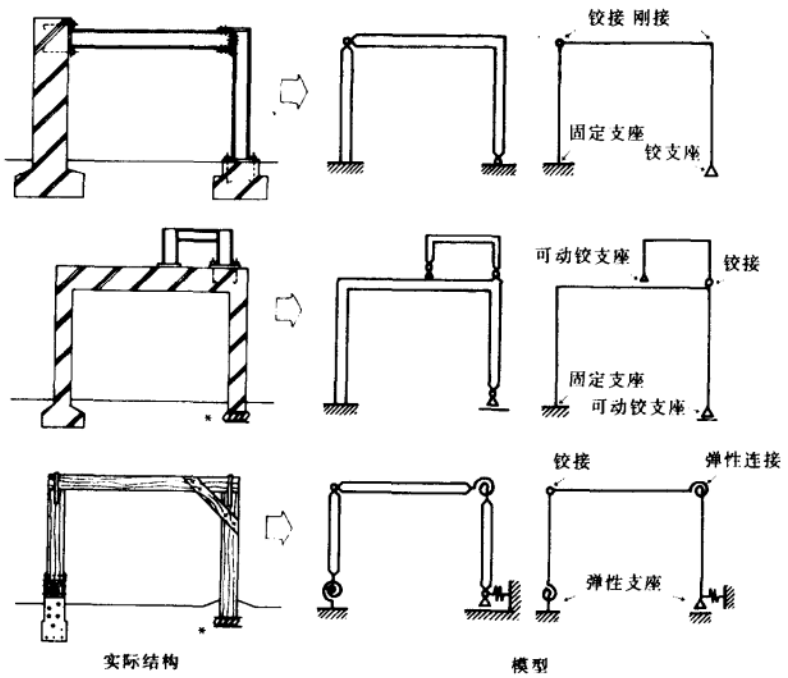


图 4.1　结构支座部分与连接部分的模型化

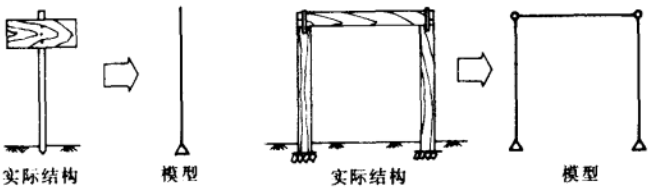
在2.2节中将平面结构的支座条件置换成4个模型（表4.1）。反力数（r）等于平衡方程式个数且为3的结构中，用固定、半固定、铰＋可动铰、3个可动铰支座等来支承。反力数 r 为1或2的结构是不存在的（例如一端铰、另一端自由的梁（图4.2(a)），为**几何可变结构**[②]。反之当 $r>3$ 时，根据结构的特点也有静定的情况。例如图4.2(e)中的结构内部有一个铰，在该点可建立一个平衡方程式 $\sum M=0$，故即使 $r=4$ 也可求解。当然即使是 $r=3$ 也可能是几何可变结构或超静定结构，应由支座条件和其它的结构状态两方面来确定其为静不定、静定或超静定。为进行判别可使用式(4.1)[③]。不过该式只是必要条件而非充分条件。例如 $f=0$ 为静定的必要条件，但 $f=0$ 时也可能是几何可变结构。关于这一点，后述的由直角位移图所得到的条件才

① 关于空间结构请参照式(4.2)及例题。

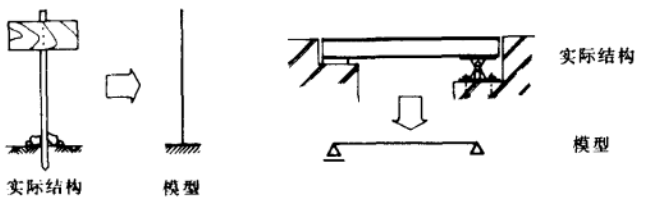
② 所谓几何可变结构是指在外力作用下变形发展很快失去抵抗能力的结构。

③ 在熟练后不使用该判别公式也可判别平面结构的静定、超静定、静不定。这种熟练的方法比依赖公式更重要。

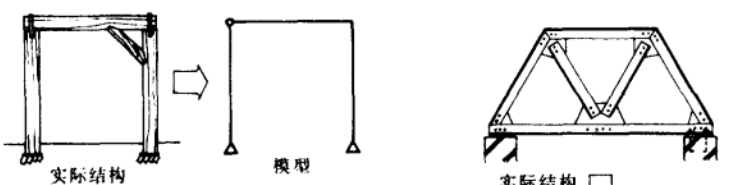
是必要充分条件。



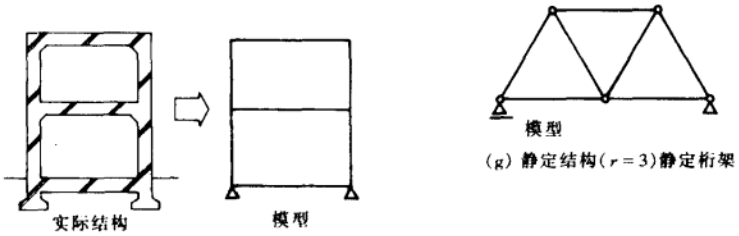
(a) 几何可变结构($r=2$)　(b) 几何可变结构($r=4$),内部有两个铰



(c) 静定结构($r=3$)悬臂梁　(d) 静定结构($r=3$)简支梁



(e) 静定结构($r=4$,内部一个铰)三铰拱



(f) 超静定结构($r=4$,$f=7$)框架　(g) 静定结构($r=3$)静定桁架

图 4.2　平面结构的静不定、静定和超静定

平面结构的判别公式

$$f = m + r + \sum j - 2n \tag{4.1}$$

式中，f —— 超静定次数($f<0$ 为静不定，$f=0$ 为静定，$f=i>0$ 为 i 次超静定)；

m —— 总杆件数；

r —— 总反力数；

j —— 各刚性节点所刚接的杆件数减 1 所得的数(图 4.3)；

n —— 总节点数(包括支点[1]，自由端)。

(1) 将结构的支承点简称为支点。

表 4.1　平面结构的支座机构模型

支承状态	模型	图示方法	反力(反力数:r)	位移条件	备注
不可转动 不可移动	固定支座		$R_x, R_y, M(3)$	转角 $\theta=0$ 位移 $(u,v)=0$	
自由转动 不移动	铰支座		$R_x, R_y(2)$	转角 $\theta\neq 0$ 位移 $(u,v)=0$	
自由转动 一个方向 移动	可动铰 支座		$R_y(1)$	转角 $\theta\neq 0$ 位移 $u\neq 0$	
可转动 可移动	弹性支承		$R_x, R_y, M(3)$	转角 $\theta\neq 0$ 位移 $(u,v)\neq 0$	弹性支座可用 固定＋弹簧代替



图 4.3　j 的计数方法

对公式(4.1)的推导有兴趣的读者可参照附录 8。在例题 1,2 中将介绍使用判别公式的实例。

这里还列出了空间结构的判别公式以供参考。**空间结构的判别公式**

$$f = m_1 + r + 3\sum j - 3n \tag{4.2}$$

式中，f —— **超静定次数**；

m_1 —— **两端铰接杆件总数**；

r —— 总反力数；

j —— 各刚性节点所刚接的杆件数减 1 所得的数(图 4.3)；

n —— 总节点数(包括支点，自由端)。

[例题 1(A 级)]　计算图 4.4(a) ～ (e) 的 f 值。

解

(a) $m=1$，　$r=2$，　$\sum j=0$，　$n=2$　　所以　$f=-1$　　静不定

(b) $m=4$，　$r=3$，　$\sum j=3$，　$n=5$　　所以　$f=0$　　静定

(c) $m=3$，　$r=3$，　$\sum j=0$，　$n=4$　　所以　$f=-2$　　静不定

(d) $m=4$，　$r=3$，　$\sum j=3$，　$n=5$　　所以　$f=0$　　静定

(e) $m=9$，　$r=3$，　$\sum j=10$，　$n=8$　　所以　$f=6$　　超静定

[例题 2(A 级)]　计算图 4.4(f) 所示空间刚架的 f 值。

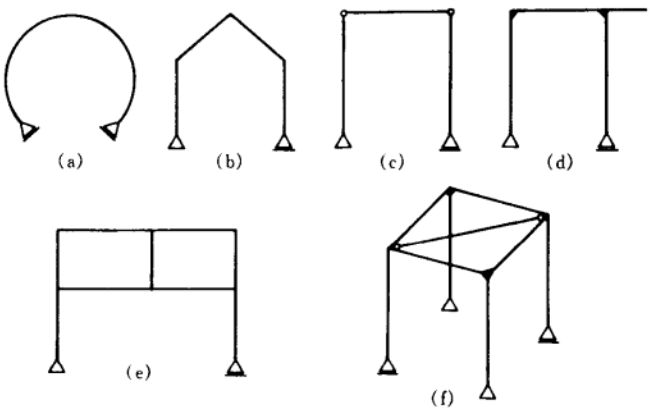


图 4.4 例题 1.2:超静定次数的计算

解 $m_1 = 1,\ r = 8,\ \sum j = 8,\ n = 8$ 所以 $f = 9$



4.2 平面桁架

桁架是指用铰将多根杆件连接而成的结构[①]。在建筑中作为大跨度的屋架和梁使用(图 4.5)。实际桁架的节点不一定是铰接,但在假定其铰接后与实际相差不大,这可由图 4.6 看出。桁架的求解方法,即求构成桁架的杆件中内力的方法大致可分为:(1) 图解法;(2) 公式解法。

(1) 图解法

图解法是通过画图来求解反力或内力的方法。方法的基本原理为

① 两端铰接直线杆件的内力仅有沿两铰连线方向作用的轴力。但当在杆件的中间部分也有作用外力时,则内力就不仅是轴力还存在剪力和弯矩(图 4.7)。

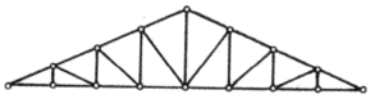
② 作用在桁架各节点上的外力与集结于该节点杆件的内力,即**杆端内力**之间,保持力的平衡。

根据上述原理,绘出各节点的力向量图,然后根据力向量图中向量(箭头)的**长度和方向**求得内力的大小和方向(轴向压力或轴向拉力)(图 4.8)。在图解法中常使用**克莱姆**(Cremona)**法**,该法的顺序明确不容易出错。但目前在实际设计中的主流是计算机解法,它已取代了图解法,故图解法的意义有了变化,即通过图形来观察桁架中力的传递,以便加深对结构力学的理解。本书在附录 7 中对克莱姆(图解)法作出了说明。

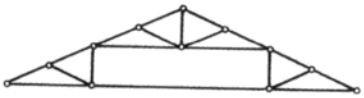
(2) 公式解法

① **节点法**:这是将图形计算简单地置换成公式计算的方法,即首先求得支座反力,再从支座出发顺次建立相邻节点的力平衡方程并求得轴力(参照[例题 1])。

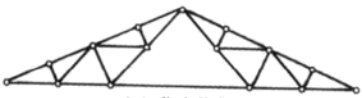
① 与桁架类似的结构有**网架**。网架与桁架一样也是用铰将杆件连接而成的结构,但其连接上下侧杆件(*上弦杆*、*下弦杆*)的杆件(腹杆)要比上下弦杆短得多。



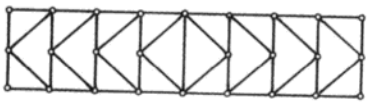
(a) 单柱桁架



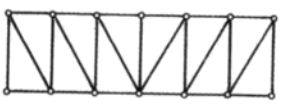
(b) 双柱桁架



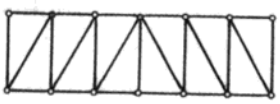
(c) 芬克桁架



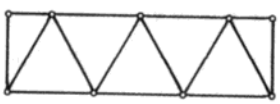
(d)



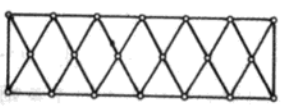
(e) 一行桁架



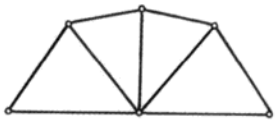
(f) 豪式桁架



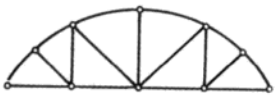
(g) 华伦(Warren)式桁架



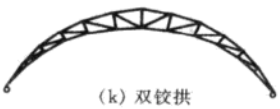
(h)



(i) 折线型桁架



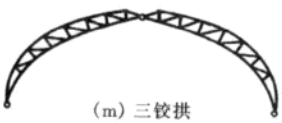
(j)



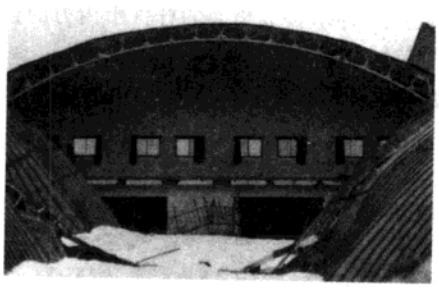
(k) 双铰拱



(l) 门型刚架



(m) 三铰拱



拱型桁架的例子(该体育馆在1981年的大雪中破坏仅剩下山墙,如照片所示)

图 4.5　各种形式的桁架

② **截面法**:节点法必须从支座出发顺次计算相邻节点直到全部节点,而截面法只需对需求轴力的杆件直接求解。首先,在求支座反力这一点上是与节点法相同的,然后将需求轴力的杆件截断,以该杆的轴力为未知数建立力平衡方程并就此求解。例如在图 4.9 中,由边长为 a 的正三角形构成的桁架在 C 点受到外力 9 N 作用时,求在 CD 杆中产生的内力。首先求得支座 A,B 的反力(A 点为 6 N,B 点为 3 N)。然后作截面 RS 通过 CD 杆将桁架截断。截断后使内力 N_1,N_2,N_3 显露出来,它们对被截断的桁架而言是作为外力作用。这里需求的轴力是 N_1(CD

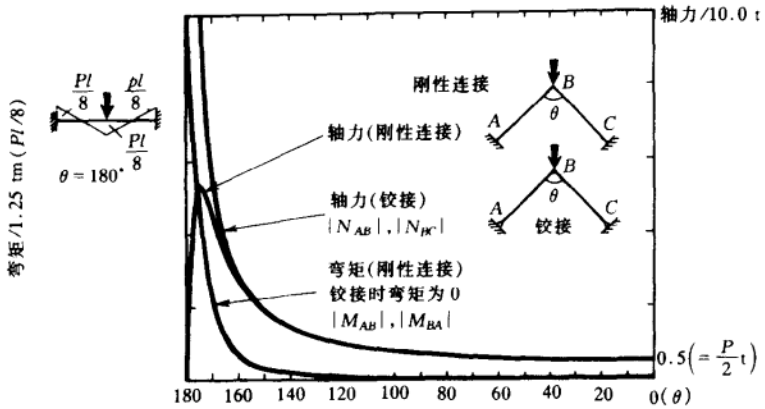


图 4.6 将桁架杆件的刚性连接假定为铰连接所产生的误差($\theta < 100°$ 时几乎没有误差)

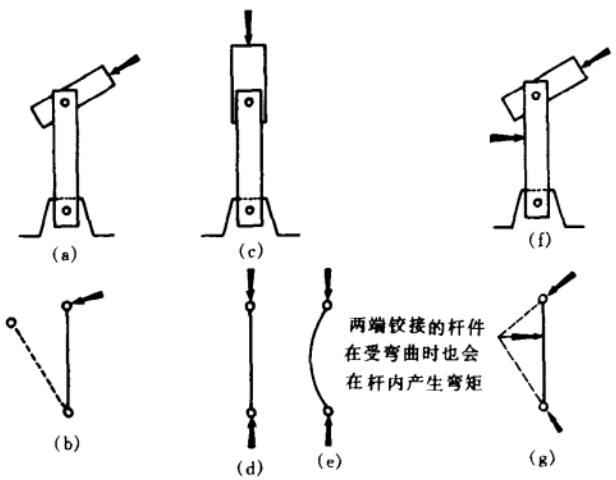


图 4.7 两端铰接的杆件(若无中间荷载它与在两端铰的连线上产生反力的可动铰支座相同)

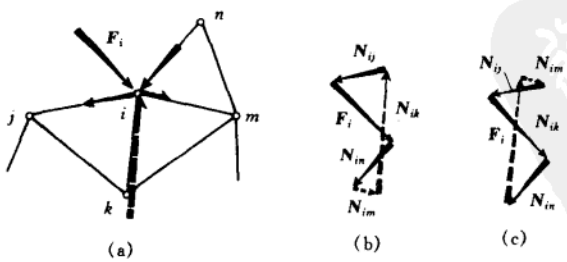


图 4.8 静定平面桁架图解法的原理(参照附录"克莱姆法")

杆）而其它二个未知的轴力 N_2，N_3 无需求出。因此，为了减少未知数简化计算，在 N_2，N_3 的交点 F 处建立力矩平衡方程。例如以左边截断体为例，有

$$R_a \times 1.5a - 9 \times 0.5a + N_1 a\sin 60^\circ = 0$$

所以

$$N_1 = \frac{-2}{\sqrt{3}}(6 \times 1.5 - 4.5) = -3\sqrt{3}$$

其中的负号表示实际的轴力是与图 4.9 所假定的 N_1 的方向相反，即在 CD 杆中产生 $3\sqrt{3}$N 的轴向拉力。

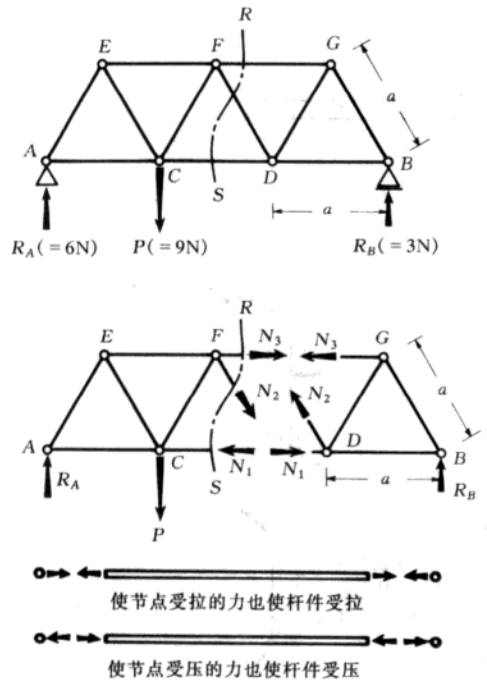


图 4.9　静定平面桁架公式解法之一：截面法（被截断的结构由于原杆件内力的存在而保持力的平衡）



图 4.10　“使用未知数多的位移法时请让计算机来完成”，不仅是静定桁架、所有的结构均可用位移法求解

③ **位移法**：该方法适用于计算机（图 4.10），不管对静定还是对超静定桁架均可求解。取各节点的位移 u_i，v_i[①] 为未知数（因此，若节点数为 n，则有 $2n$ 个未知数）。位移 u_i，v_i 与位移在各杆中产生的轴力关系可通过变形分析来求得，建立轴力与外力在各节点的力平衡方程（例如节点 i 处为 $\sum X_i = 0$，$\sum Y_i = 0$）共有 $2n$ 个。由于未知数为 $2n$ 个，方程式也有 $2n$ 个，故可解出位移 u_i，v_i（$i = 1, \cdots, n$），再由前述的 u_i，v_i 与轴力的关系求得轴力。将这种“以节点的位移为未知数而建立方程式，然后再根据由此解得的节点位移计算内力的结构分析方法”称为**位移法**。在使用这种方法时，对**弹性结构**[②]而言用矩阵来表达便于计算机的计算，同时对使用者而言公式也十分简洁容易理解。关于矩阵的计算要点在附录 5 中有说明，而桁架用位移法的分析方法在[例题 3]中说明。图 4.11 画出了静定桁架公式解法的流程图。

[例题 1(A 级)]　对图 4.12 所示平面桁架用(1) 图解法；(2) 公式法求解。

① u_i，v_i 分别表示节点 x，y 方向的位移。

② 更正确地说，应是线性结构，即指荷载-外力与变形-内力成正比关系的结构。

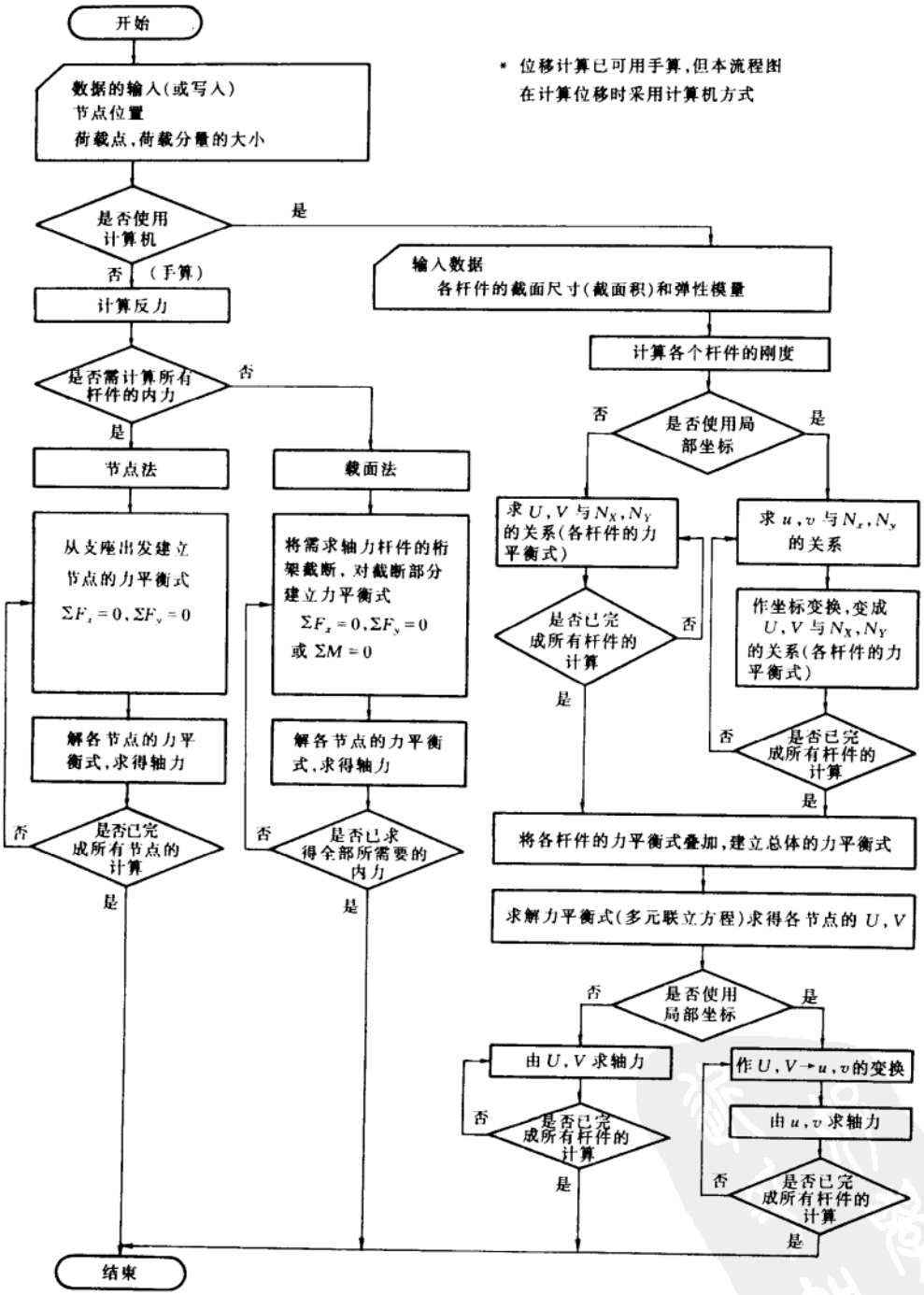


图 4.11 静定桁架数值解法顺序的流程图

（答案：A 点的反力为 3.6 N，B 点的反力为 6.4 N，轴力：杆件 AD，DB 为 +4.8 N，杆件 CD 为 +10 N，杆件 AC 为 −6 N，杆件 BC 为 −8 N）

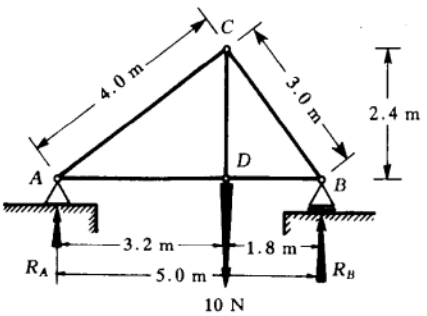


图 4.12　例题 1：求平面桁架的内力

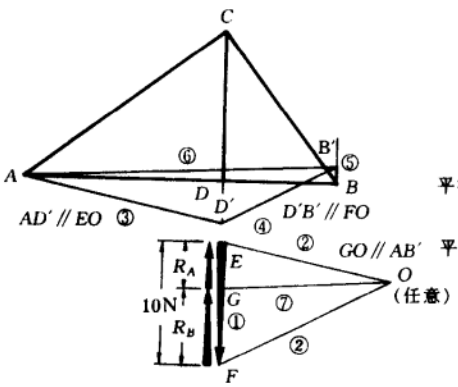
解

（1）**图解法**（假设先不使用克莱姆法求解）：在阅读了克莱姆法（附录）后再求解便可知克莱姆法的优点。

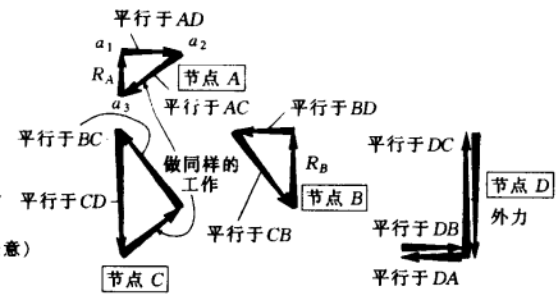
（a）反力：首先求支座 A，B 的反力作出力向量图（图 4.13(a)）。

（b）杆件轴力：利用由力向量图求得的 R_A，R_B，从支座出发顺次画出其它节点的力向量图。例如在 A 点的 R_A 的起点和终点引 AC 和 AD 的平行线得交点 a_2，再作闭合的力向量图（图 4.13(b)）。力向量图的长度 a_1a_2 为杆件 AD 轴力的大小，由于 a_1a_2 的方向使节点 A 受拉故轴力为拉力（符号为 +）。a_2a_3 为压力。以下对 B，C，D 点可运用同样方法画出力向量图求得轴力。

观察图 4.13(b) 可见，例如 a_2a_3 是改变方向画两次求得的。而使用克莱姆法时顺序是十分规则的，只要机械地制图便可，可省略上述两次画同一力向量图的过程（参照附录“克莱姆法”）。



（a）画出力向量图求得反力 R_A，R_B。O 内的号码为绘制力向量图的顺序



（b）画出各节点的力向量图求得内力

图 4.13　例题 1：图解法

（2）**公式解法**

① **节点法**（图 4.14）

（a）反力的计算：建立关于支座 A 的力矩平衡方程（R_B 为 B 点的反力）。取顺时针方向的力矩为正，则力矩的平衡方程为

$$10\times 3.2 - R_B\times 5 = 0 \quad \text{所以} \quad R_B = 6.4$$

因此

$$R_A = 10 - 6.4 = 3.6$$

（就 B 点建立力矩平衡方程

$$10\times 1.8 - R_A\times 5 = 0$$

求得 R_A）。R_A，R_B 为正，表示反力与图 4.14 假定的方向一致。

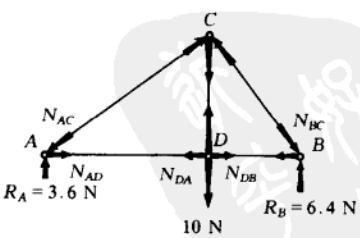


图 4.14　例题 1：公式解法 ① 节点法

（b）杆件的轴力：从支座出发顺次对各节点建立力的平衡方程然后求轴力。

A 点：

根据 $\sum Y=0$，有 $N_{AC}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}-R_A=0$

所以 $N_{AC}=\dfrac{5}{3}R_A=6.0$ (N) 压力

根据 $\sum X=0$，有 $-N_{AC}\times\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}+N_{AD}=0$

所以 $N_{AD}=\dfrac{4}{5}N_{AC}=4.8$ (N) 拉力

B 点：

根据 $\sum Y=0$，有 $N_{BC}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}-R_B=0$

所以 $N_{BC}=\dfrac{5}{4}R_B=8.0$ (N) 压力

D 点：

根据 $\sum Y=0$，有 $-N_{DC}+10\text{ (N)}=0$

所以 $N_{DC}=10$ (N) 拉力

$N_{DB}=N_{DA}=N_{AD}=4.8$ (N) 拉力

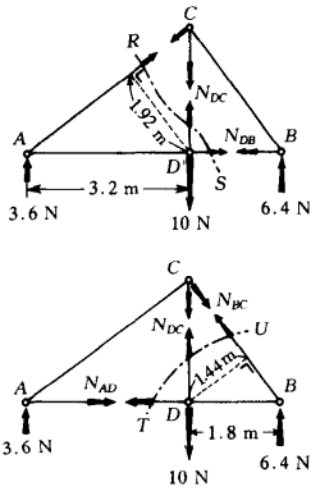


图 4.15 例题 1：公式解法 ② 截面法

② **截面法**（图 4.15）

(a) 反力的计算：同节点法

(b) 杆件的轴力：例如求 N_{AC}，N_{DC}，N_{DB} 等的轴力，用 RS 将桁架截断，根据截断部分力的平衡关系求解。

N_{AC}：在未知轴力 N_{DC}，N_{DB} 的交点 D 处建立力矩平衡方程。

$$3.6\times3.2+192N_{AC}=0,\qquad \text{所以}\quad N_{AC}=-\frac{3.6\times3.2}{1.92}=-6.0\ \text{(N)}$$

负号表示图 4.15 所画 N_{AC} 的方向与实际内力方向相反(压力)

N_{DC}：在 N_{AC}，N_{DB} 作用线的交点 A 处建立力矩平衡方程。

$$3.2\times10-3.2N_{DC}=0,\qquad \text{所以}\quad N_{DC}=10\ \text{(N)}\quad \text{拉力}$$

N_{DB}：在 N_{AC}，N_{DC} 交点 C 处建立力矩平衡方程。C 点即使位于截断部分之外也可(参照 p.64 的脚注)。

$$3.6\times3.2-2.4N_{DB}=0$$

所以 $N_{DB}=4.8$ (N) 拉力

N_{BC}：用 TU 面将桁架截断，建立 D 点处的力矩平衡方程。

$$-1.44N_{BC}-6.4\times1.8=0$$

所以 $N_{BC}=-\dfrac{6.4\times1.8}{1.44}=-8$ (N)

因此实际轴力方向与图 4.15 所画的 N_{BC} 的方向相反(压力)。

③ **位移法**

即使对本题这样简单的问题公式也很复杂，故在[例题 3]中用最简单的桁架来说明解法。本法是与后述的杆系结构的矩阵解法或有限元解法完全相同的方法，即公式的形式为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Ku}\qquad (4.3)$$

它与弹簧常数为 K 的弹簧在拉力 P 作用下的位移(伸长)u 的关系式

$$P=Ku\ \text{(参照图 4.16)}$$

为同一形式。这将在例题 3 中详细说明。若有读者想快一

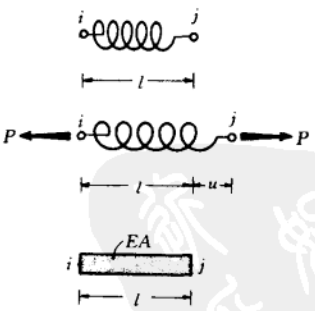


图 4.16 构成结构的单元即杆件在力学上等价于弹簧。用力 P 拉伸弹簧时有关系 $P=Ku$。而用力 P 拉伸杆件时有关系 $P=(EA/l)u$，故与弹簧常数相当的是刚度 $K=EA/l$

些阅读，建议你们可跳过例题 3 而在阅读到杆系结构的矩阵解法(5.3 节)或有限元法时再回到本例题来学习刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的建立方法。

[例题 2(A 级)]　图 4.17(a) 所示的桁架中哪些杆件的内力为 0。

解　设忽略桁架自重，且桁架在外力作用下的变形不大时，图 4.17(a) 所示桁架中有几根杆件的内力为 0?寻找内力为 0 杆件的要领是，注意像节点 E 或 L 那样的、由三根杆件构成且其中的二根位于一条直线上的节点(节点 E 由 AE、EG、EF 三根杆件构成，其中的二根 AE、EG 位于一条直线上)。更一般地可画成如图 4.17(b) 所示。由于在 E 点无外力作用，内力之间力平衡关系应成立。取 AG 方向为 x 轴，在 E 点作与 x 轴垂直的 y 轴。在 x 方向的力平衡方程为

$$N_{EA} - N_{EB} + N_{EF}\sin\alpha = 0 \quad (\text{图 4.17(c)})$$

或 $$-N_{EA} + N_{EB} + N_{EF}\sin\alpha = 0 \quad (\text{图 4.17(d)})$$

中的任一式。因此在杆件 EA、EG 中无 y 方向的内力分量。

其次，y 方向的力平衡方程为

$$N_{EF}\cos\alpha = 0$$

显然有 $N_{EF} = 0$。因此，杆件 EF 的内力为零，即使该杆件不存在时其它杆件的内力状态也不变。因此可将杆件 EF 去除。对 F 点可用同样的推理方法判定 FG 也为零杆件。然后顺次地对 G、H 点用同样方法确认 GH、HD 为零杆件。对桁架的右半部分作同样的分析，则图 4.17(a) 所示的桁架在内力分布上与图 4.18 的桁架是一样的。当然，当有 EF 等杆件时桁架会更坚固，这在学习了后面的屈曲现象后自然会理解。

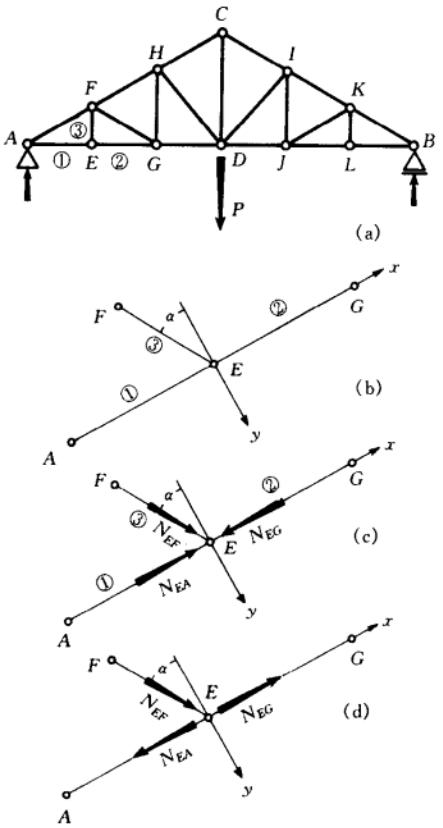


图 4.17　例题 2：桁架的零杆件。首先观察由三根杆件构成而其中的二根位于一条直线上的节点

[例题 3(c 级)]　对图 4.19 所示桁架用位移法求解其内力。

解　位移法求解桁架的过程如下所示(图 4.20)。

(1) 首先研究杆件 ij，从桁架中取出求得杆端力(N_{ij}，N_{ji})与节点 i，j 位移(u_i，v_i)，(u_j，v_j)之间的关系。即

(a) 利用节点 i，j 的位移(u_i，v_i)，(u_j，v_j)求得杆件 ij 的轴向变形 Δl。

(b) 利用虎克定律建立轴向变形 Δl 与轴力(N：内力 = 截面力)的关系，将(a) 的结果改写为**位移与内力**的关系式。

(c) 由内力 N 与杆端力(N_{ij}，N_{ji})的平衡关系，将(b) 的结果改写为**杆端力与位移**的关系式(此时，将该关系式用矩阵形式来表达则十分简明)。

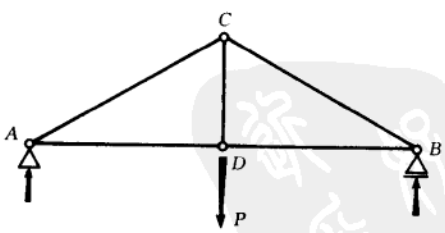


图 4.18　图 4.17(a) 的桁架在内力分布上与本图桁架一样(实际上由于自重的存在，零杆件并不存在)

(2) 利用(1)所得杆件的杆端力与位移的关系建立桁架各节点包括了荷载、外力的力平衡公式。当杆端力与位移的关系式为矩阵形式时，可将杆件的矩阵单元叠加组合到桁架总体的矩阵中，从而建立平衡公式。

(3) 将桁架的支承条件引入(2)的平衡式中，即引入边界条件。

(4) 由上述(3)所得力的平衡式求得各节点的未知位移(这个过程是求解多元一次联立方程，除极简单的结构外需借助计算机的帮助)。

(5) 利用(b)的位移与内力关系由位移求出内力 N。

下面顺次进行说明。

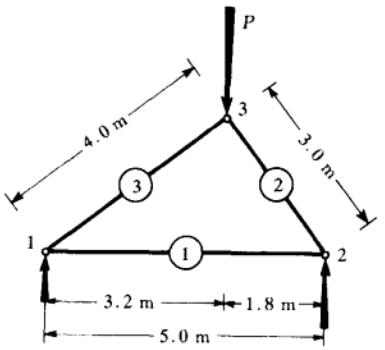


图 4.19 例题3：用位移法求解极简单的桁架。看起来工作量很大似乎很愚蠢。但只要熟悉了位移法就可对第5章的矩阵解法和有限元法(FEM)很容易理解

(1－a) 设连接节点 i、j 的杆件为 ij。杆件 ij 的长度为 l，将其在 x、y 方向的分量 l_x、l_y 分别简记为 X、Y。设 i 点处的 x、y 方向位移分量分别为 u_i、v_i；j 点处的 x、y 方向位移分量分别为 u_j、v_j。如图所示，由于位移使杆件从 ij 移动到 $i'j'$。此时杆件的伸长(Δl)，可由图清楚地看出它约等于($\overline{jj''}-\overline{ii''}$)。由图

$$\overline{jj''}=u_j\cos\theta+v_j\sin\theta$$

$$\overline{ii''}=u_i\cos\theta+v_i\sin\theta$$

另一方面，由图可见 $\cos\theta=X/l$，$\sin\theta=Y/l$，故有

$$\Delta l\approx\overline{jj''}-\overline{ii''}=\frac{1}{l}[(u_j-u_i)X-(v_j-v_i)Y] \tag{a}$$

(1－b) 应变 $\varepsilon=\Delta l/l$，而应力 $\sigma=E\varepsilon=N/A$(E 为弹性模量，N 为轴力，A 为截面积)。利用这些公式和式(a)有

$$N=\sigma A=EA\varepsilon=\frac{EA}{l}\Delta l=\frac{EA}{l^2}[(u_j-u_i)X-(v_j-v_i)Y] \tag{4.4}$$

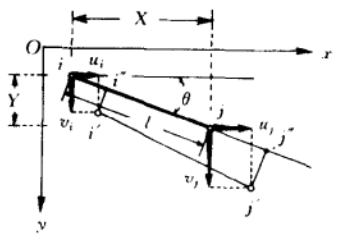


图 4.20 杆件的位移 由位移求得杆件的内力(本例为轴力)

(1－c) 由图 4.21 可清楚地看到，内力 N 与杆端力 N_{ij}、N_{ji} 处于力的平衡状态。由于内力必然是成对的存在，可将拉力定义为正号将压力定义为负号；而作为外力的杆端力指向——即其分量的符号——是该力固有的特性不能随意确定。一般可机械地对杆端力取指向坐标正向为正(图 4.21(b))。将内力变换到杆端力。对杆端力也表示成 x、y 方向的分量，根据图

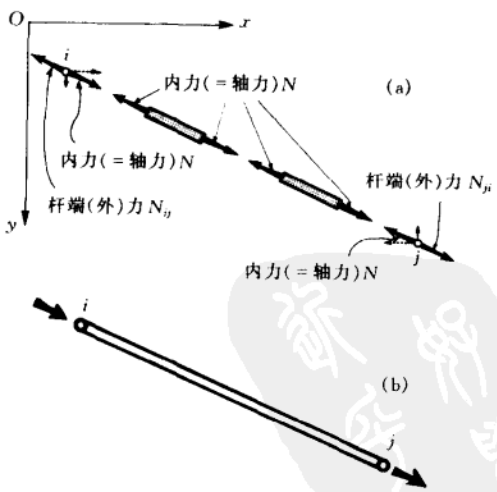


图 4.21 杆端外力与杆端内力的平衡。注意内力与外力符号的差异

4.21 利用式(4.4)，i 点的杆端力在 x 方向的分量为

$$N_{ijx}+N_x=0$$

所以 $$N_{ijx}=-N\cos\theta=-\frac{NX}{l}$$

$$=-\frac{EA}{l^3}[(u_j-u_i)X^2+(v_j-v_i)XY]$$

负号表示它与图 4.21(b) 假定的 N_{ij} 的方向相反，实际上应如图 4.21(a) 所示的那样。将上式用矩阵形式表示①，即为

$$N_{ijx}=-\frac{EA}{l^3}[X^2 \quad XY]\begin{bmatrix}u_j-u_i\\v_j-v_i\end{bmatrix}$$ ②

进而可将之改写为

$$N_{ijx}=\frac{EA}{l^3}[X^2 \quad XY \quad -X^2 \quad -XY]\begin{bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{bmatrix}$$

同样对 y 方向分量有

$$N_{ijy}=-N\sin\theta=-\frac{NY}{l}$$

$$=-\frac{EA}{l^3}[(u_j-u_i)XY+(v_j-v_i)Y^2]$$

$$N_{ijy}=\frac{EA}{l^3}[XY \quad Y^2 \quad -XY \quad -Y^2]\begin{bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{bmatrix}$$

将上述两式合并后有

$$\begin{bmatrix}N_{ijx}\\N_{ijy}\end{bmatrix}=\frac{EA}{l^3}\begin{bmatrix}X^2 & XY & -X^2 & -XY\\XY & Y^2 & -XY & -Y^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{bmatrix} \tag{b}$$

再对 j 点的杆端力 N_{jr} 与位移的关系用完全相同的方法求得(参照图 4.20)，合并可记为

$$\begin{bmatrix}N_{ijx}\\N_{ijy}\\N_{jix}\\N_{jiy}\end{bmatrix}=\frac{EA}{l^3}\left[\begin{array}{cc:cc}X^2 & XY & -X^2 & -XY\\XY & Y^2 & -XY & -Y^2\\\hdashline -X^2 & -XY & X^2 & XY\\-XY & -Y^2 & XY & Y^2\end{array}\right]\begin{bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{bmatrix} \tag{4.5}$$

这就是用矩阵形式表示的杆端力与位移的关系式③。

在上述矩阵形式中，中间虚线的划分并非意味着什么特别的矩阵。当假定矩阵

$$[k]=\frac{EA}{l^3}\begin{bmatrix}X^2 & XY\\XY & Y^2\end{bmatrix}$$

① 关于矩阵可参照附录 5，在矩阵运算中最常用的是矩阵积，在目前只要记住矩阵积便足够了。

② 该式是在杆件变形前位置建立的。这是由于变形是微小的，若变形大时必须以变形后的位置来建立公式(θ 也变化)。

③ 它是在局部坐标系中建立的关系，通过坐标变换可得在总体坐标系下完全相同的公式。请参照第 5 章练习题 5.16 及其答案。

可用中间虚线将式(4.5)写成极简单的形式

$$\begin{bmatrix} N_{ij,x} \\ N_{ij,y} \\ N_{jx} \\ N_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k] & [-k] \\ [-k] & [k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

式中，$N_{ij,x}$，$N_{ij,y}$，… 为力的分量，u_i，v_i，… 为位移分量。

当设

$$\begin{bmatrix} N_{ij,x} \\ N_{ij,y} \\ N_{jx} \\ N_{jy} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{P},\quad \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{u},\quad \frac{EA}{l^3}\left[\begin{array}{cc:cc} X^2 & XY & -X^2 & -XY \\ XY & Y^2 & -XY & -Y^2 \\ \hdashline -X^2 & -XY & X^2 & XY \\ -XY & -Y^2 & XY & Y^2 \end{array}\right] \equiv \boldsymbol{K}$$

可有

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \qquad \text{(前文 4.3)}$$

该式与弹簧常数为 K 的弹簧在拉力 P 作用下伸长 u 时的公式 $P = Ku$（虎克定律）的形式完全相同。此时的弹簧系数 $K = EA/l$，当弹簧为沿 x 方向设置时（图 4.16），则有

$$P_x = \frac{EA}{l}u = \frac{EA}{l}(u_j - u_i)$$

这与式(4.5)中设 $X = l$，$Y = 0$（即杆轴取 x 方向）时所得的结果完全相同（P_x 相当于 $N_{ij,x}$）。

$$\begin{bmatrix} N_{ij,x} \\ N_{ij,y} \\ N_{jx} \\ N_{jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix},\qquad \text{所以}\quad N_{ij,x} = \frac{EA}{l}\{u_j - u_i\}$$

因此，$\boldsymbol{K}$ 与弹簧常数 K 在本质上相同，称之为**刚度矩阵**。像式(4.3)这样的一般的刚度矩阵必须是对称矩阵。

(2) **形成各节点力平衡公式**（形成总体刚度矩阵）

式(4.5)为一根杆件的力、刚度、位移的关系式，利用它可就各节点建立力的平衡关系。例如图 4.22 表示了节点 i，在其上连接有杆件 ij 和 ik 并作用有外力 $\boldsymbol{P}_i$。此时杆端力的总和

$$\boldsymbol{N}_{ij} + \boldsymbol{N}_{ik}$$

必须等于外力 $\boldsymbol{P}_i$ 才能使节 i 点处于静止状态。即

$$\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{N}_{ij} + \boldsymbol{N}_{ik}$$

若写成分量有

$$\begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ij,x} + N_{ik,x} \\ N_{ij,y} + N_{ik,y} \end{bmatrix}$$

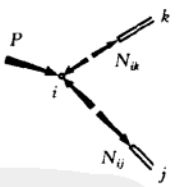


图 4.22 节点 i 处杆端力与外力的平衡

上式的右边可利用式(4.5)表示成节点的位移。为了区分杆件 ij 和 ik，在 E，A，l，X，Y 各量中均标上脚标，有

$$\begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{bmatrix} = \frac{E_{ij}A_{ij}}{l_{ij}^3}\begin{bmatrix} X_{ij}^2 & X_{ij}Y_{ij} & -X_{ij}^2 & -X_{ij}Y_{ij} \\ X_{ij}Y_{ij} & Y_{ij}^2 & -X_{ij}Y_{ij} & -Y_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{E_{ik}A_{ik}}{l_{ik}^3}\begin{bmatrix} X_{ik}^2 & X_{ik}Y_{ik} & -X_{ik}^2 & -X_{ik}Y_{ik} \\ X_{ik}Y_{ik} & Y_{ik}^2 & -X_{ik}Y_{ik} & -Y_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

设 $$\frac{E_{ij}A_{ij}}{l_{ij}^3}X_{ij}^2 \equiv K_{1j},\ \frac{E_{ij}A_{ij}}{l_{ij}^3}Y_{ij}^2 \equiv K_{2j},\ \frac{E_{ij}A_{ij}}{l_{ij}^3}X_{ij}Y_{ij} \equiv K_{3j},\ \frac{E_{ij}A_{ij}}{l_{ij}^3}X_{ik}^2 \equiv K_{1k},\cdots$$

可将式(c)改写为

$$\begin{bmatrix}P_{ix}\\P_{iy}\end{bmatrix}= \begin{matrix}u_i & v_i & u_j & v_j & u_k & v_k\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{matrix} \begin{bmatrix}K_{1j}+K_{1k} & K_{3j}+K_{3k} & -K_{1j} & -K_{3j} & -K_{1k} & -K_{3k}\\ K_{3j}+K_{3k} & K_{2j}+K_{2k} & -K_{3j} & -K_{2j} & -K_{3k} & -K_{2k}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\\u_k\\v_k\end{bmatrix} \tag{d}$$

同样地就节点 j、k 及其它所有的节点建立同样的力平衡公式。为了从总体上表示各节点力平衡公式，将记载所有节点荷载分量的矩阵阶数取为总节点数的二倍(包括外力为零的节点)，同时对右边的刚度矩阵和位移向量的阶数也取为总节点数的二倍，即设总节点数为 N，则需总的储存空间大小为 $2N\times(2N+2)$[①](图 4.23(a))。从节点 1 到 N 标上脚标，按 P_1、P_{1y}、P_{2x}、P_{2y}、… 的顺次写入右边的向量矩阵。对刚度矩阵也可按顺序写入，此时由式(c)、式(d)式可看出需边叠加边写入。例如对图 4.23(b)的节点 i，它除了①自己本身，此外

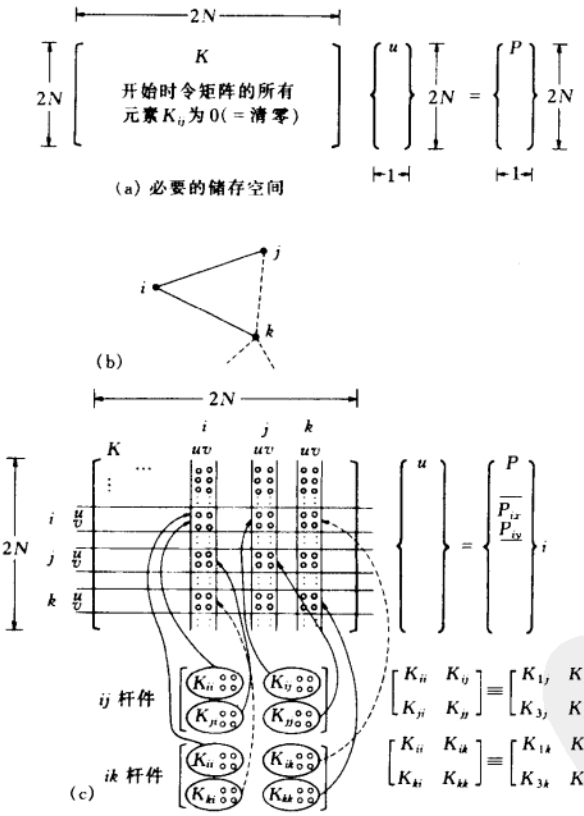


图 4.23　由杆件刚度矩阵组装总体结构刚度矩阵的顺序——叠加组装的操作

① 由于刚度矩阵为对称矩阵，习惯后仅书写其一半即可。

尚与②通过杆件 ij 连接的节点 j，③通过杆件 ik 连接的节点 k 有关。因此如图 4.23(c) 所示，将刚度矩阵组装在节点的两行(P_{ix}，P_{iy} 及 u_i，v_i 的行)与节点 i，j，k 各两列交叉的部分中(在图 4.23(c) 中表示了杆件 ij，ik 的组装过程)。

其次，在组装杆件 $i-k$ 的刚度矩阵时，在交叉部分 $i-i$ 处已写有杆件 $i-j$ 的刚度矩阵，此时只要将它们相加即可，这可由式(d)清楚地看出。即

$$\begin{bmatrix} K_{1j} & K_{3j} \\ K_{3j} & K_{2j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1k} & K_{3k} \\ K_{3k} & K_{2k} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{1j}+K_{1k} & K_{3j} & K_{3k} \\ K_{3j} & K_{2j} & \\ K_{3k} & & K_{2k} \end{bmatrix}$$

以下可同样地就所有节点和所有杆件进行**叠加组装**，即可完成各节点的力平衡式。同时也完成了总刚度矩阵[1]。若桁架总体的刚度矩阵不对称，则意味着计算中有错误。

(3) **边界条件的引入**：在(2)中得到的力平衡式实际上是不完全的，其总体刚度矩阵的行列式值为零。这意味着结构没有支承。因此需将支承点(点 1,2)的支承条件代入(2)的公式中。在本例中，对铰接点 1 为：$u_1=0$，$v_1=0$，对可动铰接的点 2 为：$v_2=0$。

对结构的运动或变形构成某种约束或限制条件(包括上述的支承条件)，称为边界条件。

(4) **求解多元一次联立方程**：考虑了(3)的边界条件可减少未知数的数量，但仍为多元一次联立方程，一般需借助计算机的帮助(未知数三个以下可用手算)。

(5) **求各杆件内力**：由于通过对(4)的求解可求得各节点的位移，故可由式(4.5)求出各杆件的杆端力，然后可求得内力。

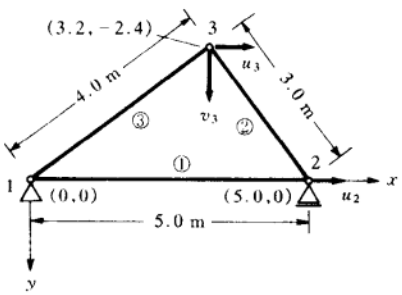


图 4.24 例题 3：准备已完成可求解例题 3

以上为一般的求解方法。下面对例题 3 用位移法求解(图 4.24)。

当该桁架上作用有外力时，由于 $u_1=v_1=v_2=0$，故未知的节点位移仅为：u_2，u_3，v_3 三个，为使手算方便在开始时就考虑到边界条件，就节点 2 的 x 方向和节点 3 的 x，y 二方向建立力平衡式，可得式(e)的关系。这里 l_1，A_1，k_1 分别定义为杆件 1－2(杆件①)的长度，截面积和 $k_1=(EA_1/l_1^3)$。

$$N_{21x}+N_{23x}=0,$$

$$\text{所以 } k_1\begin{pmatrix} -X_1^2 & 0 & X_1^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{pmatrix} X_2^2 & X_2Y_2 & -X_2^2 & -X_2Y_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{32x}+N_{31x}=0,$$

$$\text{所以 } k_2\begin{pmatrix} -X_2^2 & -X_2Y_2 & X_2^2 & X_2Y_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} + k_3\begin{pmatrix} X_3^2 & X_3Y_3 & -X_3^2 & -X_3Y_3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

[1] 对叠加组装的意义不完全理解的人可作如下考虑以加深理解：当节点 i 及 j 发生位移时，若没有杆件 ij，则不存在对位移的抵抗，故没有必要叠加力。此时，插入杆件 ij，令它预先发生正好等于上述位移的变形。为此，必须在杆件 ij 的节点 i 和 j 分别作用力 N_{ijx}，N_{ijy} 和 N_{jix}，N_{jiy}。同时该力与位移有以下关系成立

$$\begin{bmatrix} N_{ijx} \\ N_{ijy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1j} & K_{3j} & -K_{1j} & -K_{3j} \\ K_{3j} & K_{2j} & -K_{3j} & -K_{2j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} N_{jix} \\ N_{jiy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{1j} & -K_{3j} & K_{1j} & K_{3j} \\ -K_{3j} & -K_{2j} & K_{3j} & K_{2j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

以"(刚度矩阵)×(位移)"的形式供杆件 $i-j$ 用，加入到力的平衡式中即可。

$$N_{32y} + N_{31y} = P$$

所以 $k_2(-X_2Y_2 \quad -Y_2^2 \quad X_2Y_2 \quad Y_2^2)\begin{bmatrix}u_2\\0\\u_3\\v_3\end{bmatrix} + k_3(X_3Y_3 \quad Y_3^2 \quad -X_3Y_3 \quad -Y_3^2)\begin{bmatrix}u_3\\v_3\\0\\0\end{bmatrix} = P$ (e)

将式(e)的三个公式分别作矩阵积的运算，按未知数进行重新归纳后得到以下新的矩阵形式

$$\begin{bmatrix}0\\0\\P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(k_1X_1^2 + k_2X_2^2) & -k_2X_2^2 & -k_2X_2Y_2\\ -k_2X_2^2 & (k_2X_2^2 + k_3X_3^2) & (k_2X_2Y_2 + k_3X_3Y_3)\\ -k_2X_2Y_2 & (k_2X_2Y_2 + k_3X_3Y_3) & (k_2Y_2^2 + k_3Y_3^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\\v_3\end{bmatrix}$$

该式的形式为 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{K}$ 为对称矩阵。它为三元联立方程，可求得 u_2、u_3、v_3。将求得的结果再代入式(4.4)，可算得例如杆件 2－3(杆件 ②)的内力为

$$N_2 = \frac{EA_2}{l_2^2}[(u_3 - u_2)X_2 + (v_3 - 0)Y_2]$$

其中 $X_2 = -1.8$ (m)，$Y_2 = -2.4$ (m)。

表 4.2 输入数据和计算结果

输入数据	杆件名	①	②	③
	杆件截面积 A (cm^2)	20	20	10
	E (t/cm^2)		2.0×10^3	
	荷载 $P(t)$		10	
	构成杆件的节点名	1,2	2,3	1,3
计算结果	节点名	1	2	3
	节点位移 u (cm)	0	0.06	−0.0384
	v (cm)	0	0	0.1488
	杆件名	①	②	③
	杆件内力 $N(t)$	4.8	−8.0	−6.0



4.3 静定梁

(1) 简支梁及其模型

静定梁中最基本的是**悬臂梁**(参照 3.3 节)和**简支梁**。简支梁的使用实例如用木材架设渡小河的桥(图 4.25(a))。如图 4.25(b) 所示一端为铰，一端为可动铰支承的杆件①。请大家用手头的橡皮用手指作为支承做简支梁的实验(图 4.26)。可根据手指受压情况来体会支点 A，B 产生的反力，同时可根据橡皮的挠曲情况和表面的开裂或皱折情况来考察橡皮中产生的内力情况。科学的方法是："建立能说明实验结果的理论，再用实验来验证用该理论推测的现象"。这个

① 一般由于外力仅作用在重力方向，选哪个支点为铰接其内力均相同。但随着结构形状与外力的不同选两个支点中的哪个支点为铰接可能会对内力状态产生大的影响，故在建立模型和详细设计时需引起充分注意。

简支梁的实验在本节和下节(4.4)中将起大的作用。由于复杂结构均是由简支梁和第3章所述的悬臂梁这样的基本单元所构成,故下面来详细说明简支梁的解法。

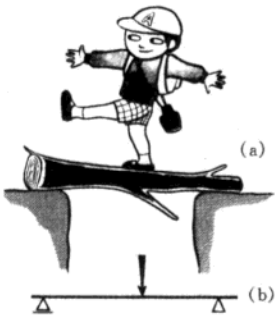


图 4.25 简支梁的原型与模型



图 4.26 观察用橡皮做成简支梁的行为

(2) **一个集中荷载作用下简支梁的反力**

① **公式解法**

考察最简单梁(简支梁)上 C 点作用有 y 轴方向力 F 时的情况(图 4.27(a))。

首先计算反力。反力也是外力故需建立外力之间的**力平衡式**(不要忘了力矩平衡式)。在可动铰支座 B 点仅产生 y 方向的反力 R_{By}。而在铰支座中一般存在 x,y 两方向的反力(R_{Ax},R_{Ay})。

力的平衡式为

$$\sum X = 0 \qquad \text{所以} \quad R_{Ax} = 0 \tag{Ⅰ}$$

$$\sum Y = 0 \qquad \text{所以} \quad F + R_{Ay} + R_{By} = 0 \tag{Ⅱ}$$

$$\sum M = 0 \qquad \text{对 } A \text{ 点取力矩(取顺时针方向为正)有}$$

$$F_a + R_{By} l = 0 \tag{Ⅲ}$$

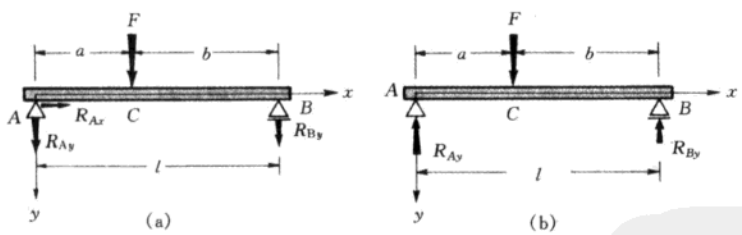


图 4.27 受垂直集中荷载 F 作用的简支梁

上述联立方程中有3个未知数(R_{Ax},R_{Ay},R_{By})而方程数为3个(式(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)),故可求解。

首先由(Ⅲ)式得

$$R_{By} = -\frac{Fa}{l} \tag{Ⅳ}$$

将式(Ⅳ)代入式(Ⅱ),有

$$R_{Ay} = -\frac{F(l-a)}{l} = -\frac{Fb}{l}$$

反力前的负号(—)表示实际的反力与假定的方向相反(图 4.27(b))。

上面的求解中,平衡方程式是严格地按照坐标系建立的,故计算时间略多但不会出错。在熟练后可根据直观来确定反力的方向。同时在本例中,明显地有 $R_{Ax}=0$,故可直接从图(4.27(b))出发,此时力的平衡式也选择未知数少的方程。在本例中,与使用式(Ⅱ)y 方向的力平衡式($\sum Y=0$)相比,取未知反力作用点 A,B 的力矩平衡式则计算更方便[①]。取 A 点的力矩,由图 4.27 有 $Fa=R_Bl$,取 B 点的力矩,有 $Fb=R_Al$,这样可直接得到 $R_A=Fb/l$,$R_B=Fa/l$。此时 R_A,R_B 的符号为正表示实际的反力与假定的方向相同(若为负,则表示与假定的方向相反)。

② **图解法**

如上所述,由于通过计算来求反力是很简单的,故在实际设计中往往是使用公式解法。但是为了加深理解,用眼睛一边观察力一边求解则需依赖于图解法。在第 3 章 3.1.2 中已叙述了:相当于 $\sum X=0$,$\sum Y=0$ 的是力向量图,相当于 $\sum M=0$ 的是力向量图 + 力多边形。只要物体有尺寸,则 $\sum M=0$ 的条件是不可缺的。在描绘力向量图时原点可任意选取。

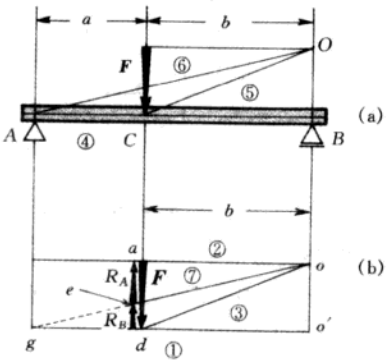


图 4.28　用图解法求解反力(画出力多边形)

为说明的方便,取图 4.28(b) 所示的 $\boldsymbol{F}$,引与 $\boldsymbol{F}$ 正交的直线 $\overline{ao}$,截取 o 点使 $\overline{ao}=b$。然后将 o 与 $\boldsymbol{F}$ 的终点连接得 d。其次从图 4.28(a) 的铰支点 A 引 AC 平行于 $\overline{ao}$,与 $\boldsymbol{F}$ 的交点为 C,令 $CO \parallel \overline{do}$,它与反力 R_B 作用线的交点为 O。连接 OA,在图 4.28(b) 引 $\overline{oe}$ 使 $\overline{oe} \parallel OA$。设与力向量图 $\boldsymbol{F}(\overrightarrow{ad})$ 的交点为 e,则 $\overline{ea}$,$\overline{de}$ 分别相当于 R_A,R_B。引 $\overline{oa}$ 使 $\overline{oa} \parallel \overline{o'd}$,其延长线与 $\overline{oe}$ 延长线的交点为 g,则

$$\Delta OAB \equiv \Delta ogo'^{②}, \qquad \text{所以} \quad \overline{gd}=AC(=a)$$

根据

$$\Delta oae \propto \Delta gde, \qquad \text{所以} \quad \overline{ae}/\overline{de}=\overline{oa}/\overline{gd}=b/a$$

有 $R_A/R_B=b/a$,同时由 $\Delta ogo' \propto \Delta eoa$ 可得 $R_A/F=b/l$。

(3) **一个集中荷载作用下简支梁的内力**

由于已求得了反力,下面可求梁内产生的内力。一旦求得反力后,已无必要区分简支梁还是悬臂梁。一个物体如图 4.29 所示受外力作用时,只要它在空中静止,会求悬臂梁内力的人也会求出该空中物体的内力。

为求内力,应将需求内力的面切开,在截面处加上力或力矩使切开部分保持力的平衡状态(图 4.30)。在截面处加上的力或力矩便是该面产生的内力。

① 也可取关于不同三点 A,B,C 的力矩平衡式($\sum M)_A=0$,($\sum M)_B=0$,($\sum M)_C=0$ 来代替力平衡式 $\sum X=0$,$\sum Y=0$,$\sum M=0$。同时还可如本例这样,用 $\sum X=0$,$\sum Y=0$ 中的一个式子代替力矩平衡式,与($\sum M)_A=0$,($\sum M)_B=0$ 组成三个式子。

② $\equiv$ 表示全等。例如 $\Delta OCB \equiv \Delta odo'$,所以 $OB \equiv \overline{oo'}$,所以 $\Delta OAB \equiv \Delta ogo'$。此外,$\propto$ 表示相似。

前面已讲过，将各截面产生的内力画在该截面位置处的图是**内力图**，将 N,Q,M 三种图作为一组。对梁而言，特别是 M 图对确定梁（即设计梁）的大小和形状起决定性作用，且绘制 M 图后可更容易地求出 N,Q 图，故往往仅要求绘制 M 图[①]。

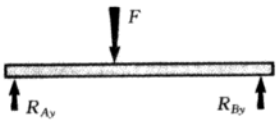


图 4.29 求得反力后，已无必要区分简支梁还是悬臂梁。可求得外力作用下空中静止杆的内力



图 4.30 “为求内力需将结构切开”

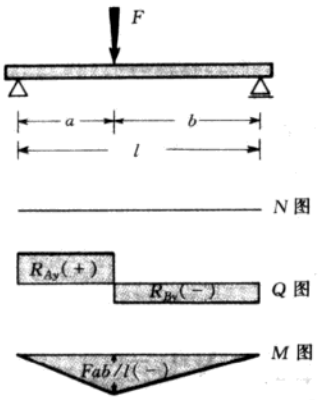


图 4.31 垂直集中荷载 F 作用下简支梁的内力图（N,Q,M 图）

受垂直集中荷载作用简支梁的 N,Q,M 图如图 4.31 所示。若已知反力而仍不会画 N,Q,M 图的读者，请再重读一下 3.3 节中关于悬臂梁内力的求法。同时可参照本节最后给出的内力图画法的部分。

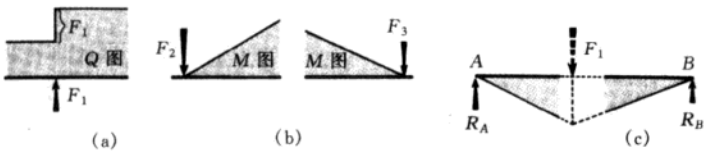


图 4.32 Q 图、M 图的画法（在 4.5 节中将作归纳）

如上所述，本书中对剪力对的符号取顺时针（↑ ↓）为正。对弯矩对的符号取上侧受拉（(+)）为正。在第 3 章中已指出：这些符号的取法在不同的书中有不同的规定，而本书对 N,Q 符号的取法是较常用的[②]。对本例，由于外力（F 及 R_A,R_B）没有沿杆轴（x 轴）的分量，故轴力为零。对 Q 图宜从杆件轴线的左端开始画起，当遇到外力作用时，则沿外力方向将 Q 图按其大小平行移动即可（图 4.32(a)）。弯矩如图 4.32(b) 所示，若已熟悉了悬臂梁弯矩图的画法则可方便地画出。即可从 A,B 点的两端出发画，也可从 A 或 B 点出发画，在与 F 的交点处转折并与另一端连接（图 4.32(c)）。

① 这还取决于梁的跨度（l）和梁截面高度（h）之比。h/l 愈大则剪力 Q 将比弯矩 M 产生更大的影响（图 4.31）。

② 符号的取法对不同的作者有不同的规定这一点也表明该符号并不具有很大的意义。但在同一本书中若随时改变符号会造成混乱，故在本书中使用统一的符号。所取的符号与取 y 轴垂直向下的坐标系是一致的。本书关于弯矩符号的定义是接近于欧美的定义，而图则采用日本常用的方法绘制。

(4) 斜方向集中荷载作用下的简支梁

下一个问题是考察简支梁受斜方向力 F 作用的情况(图 4.33)。当将 F 分解为 x,y 的分量 F_x,F_y 后,问题将变得容易。可由力平衡式得到

$$R_{Ax}=-F_x,R_{Ay}=-\frac{F_yb}{l},R_{By}=-\frac{F_ya}{l}$$

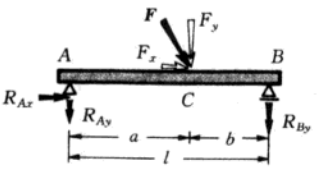


图 4.33　受斜方向集中荷载 $\boldsymbol{F}(F_x,F_y)$ 作用的简支梁

N,Q,M 图可如图 4.35 那样绘制。对图解法而言,本问题要比前面受集中垂直外力的例子更容易。这是由于,可动铰支座反力 R_B 与 F 在图上的 D 点相交,而铰支座反力 R_A 若不通过 D 点则 $\sum M=0$ 便不成立。因此,根据力三角形可在图上容易地求得 R_A,并由 R_A 求得 R_{Ax},R_{Ay}。内力也可根据悬臂梁的要领在图上方便地求出(图 4.35)。

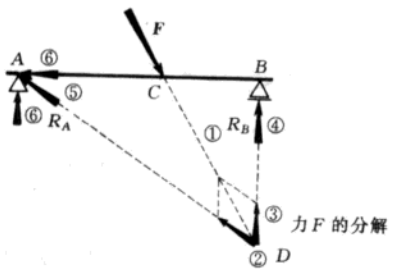


图 4.34　用图解法求斜方向集中荷载 $\boldsymbol{F}$ 作用下简支梁的反力

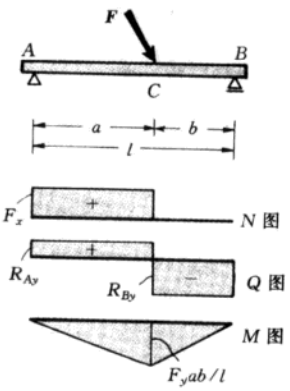


图 4.35　受斜方向集中荷载 $\boldsymbol{F}$ 作用的简支梁的内力图

(5) 受几个集中荷载作用的简支梁

当受几个集中外力作用时,可叠加每个集中外力单独作用时的解来求得反力和内力。反之也可将几个外力合成为一个等价外力[①]来求得反力,或者也可对几个外力直接使用力平衡式(图 4.36)。不过,内力是不能用等价合力来求取的。

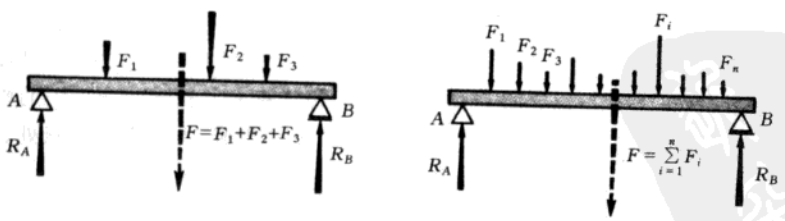


图 4.36　几个集中荷载作用下梁的反力(R_A,R_B)可分别对各荷载计算后叠加,也可先求荷载的合力对该合力求反力

① 所谓等价合力不单是指力的大小,还包括力矩,即不仅是力向量图还要考虑力多边形所求得的合力。

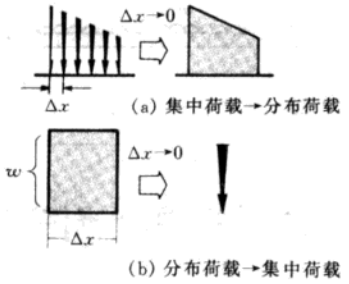


图 4.37 当集中荷载的数量增加，其荷载间隔 Δx 无限减小时便变成了分布荷载，反之当分布荷载的分布幅度 Δx 无限减小时便变成了集中荷载

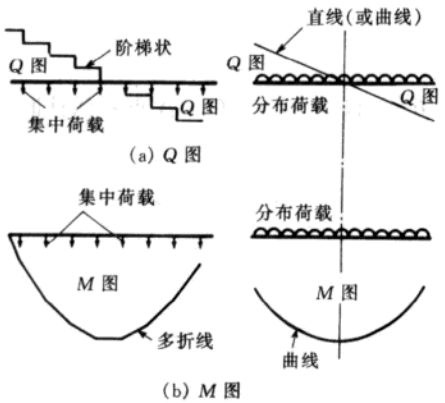


图 4.38 多个集中荷载变为分布荷载的考虑方法便于理解 M，Q 图的变化

(6) **受分布荷载作用的简支梁**

当集中外力的数量无限地增加下去便成了**分布荷载**[①](图 4.37(a))。与这种考虑方法相反，也可认为**集中荷载**是分布荷载 $F = w\Delta x$ 当 $\Delta x \to 0$ 时的一种模型化方法。这样便于对集中荷载作用部分的剪力不连续性作出解释(图 4.38)。同时，对梁的自重或在梁上连续地堆沙袋时可用分布荷载建立模型，而对在梁上放石块时可用集中荷载建立模型(图 4.39)。

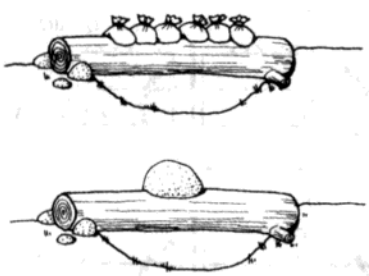


图 4.39 尽管在数学上是不严密的，但可认为在桥上排列放置沙袋是分布荷载，而放置大石块是集中荷载

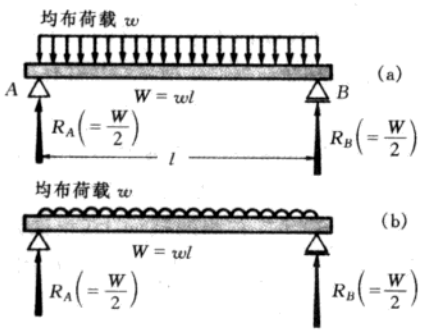


图 4.40 用图表示分布荷载时，可使用(a)或(b)的任意一种表示方法

先来求解在分布荷载中最简单也是在实际设计中经常遇到的，如图 4.40 所示的**均布荷载**的情况。根据荷载的对称性，反力为

$$R_{Ax} = 0, R_{Ay} = R_{By} = \frac{W}{2}$$(在下文中将 R_{Ay}，R_{By} 简记为 R_A，R_B)

式中，$W = wl$，w 为单位长度上的荷载，使用的单位是 N/m，kgf/cm，t/m。轴力为零($N = 0$，见图 4.41(b))。在距离 A 点 x 处的剪力 Q(图 4.41(b)) 为

① 比集中力、分布力用得更多的词是集中荷载、分布荷载，但两者在内容上是相同的。

$$Q(x) = -R_B + w(l-x) = \frac{w}{2}(l-2x) \tag{4.6}$$

另一方面，根据图 4.41(b)，A 点右侧截断部分的弯矩为

$$M(x) = -R_B(l-x) + w(l-x)\frac{l-x}{2}$$

$$= \frac{w(l-x)}{2}[-l+(l-x)]$$

$$= \frac{-w}{2}x(l-x) \tag{4.7}$$

A 点左侧截断部分的弯矩为

$$M(x) = -R_A x + wx\frac{x}{2} = \frac{-w}{2}x(l-x) \tag{4.8}$$

两者的结果相同。

将荷载图(w图)和Q图、M图画在一起后，可观察到以下特点(图 4.41(c)，(d)，(e))。

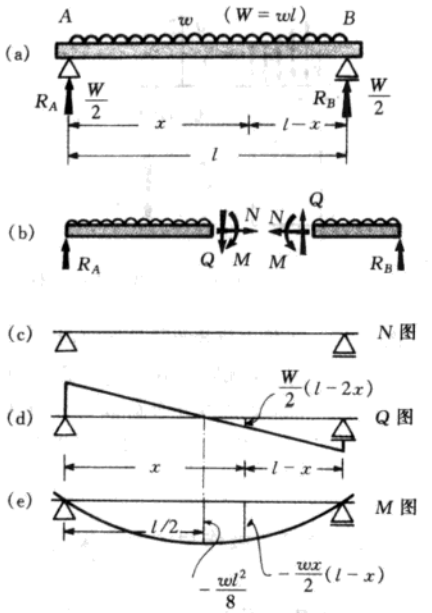


图 4.41　受均匀荷载 w 作用的简支梁内力图

1) 当 w 为常数时，Q 图为直线，M 图为二次曲线。

2) 在 $Q=0$ 处($x=l/2$)，M 的绝对值为最大($M(l/2) = -wl^2/8$)。

这里研究 w 与 Q，M 的关系。将梁的一个微段(dx) 切出，如图 4.42(a) 所示，作用有分布荷载 w_x，w_y[①]，在截面上产生内力 N，Q，M。即使长度 dx 很微小，但在两个切面上的内力仍有极小的差异，在左侧的截面上(负面) 内力为 N，Q，M，右侧的截面上(正面) 内力为 $N+\mathrm{d}N$，$Q+\mathrm{d}Q$，$M+\mathrm{d}M$(图 4.42(b))。该微段的平衡式为

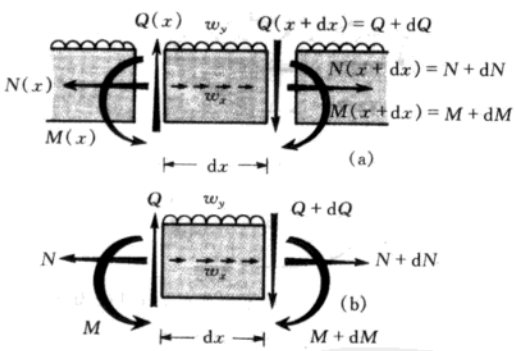


图 4.42　从梁切出微元体来观察，容易理解内力之间的关系。可得到以下的重要公式 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}x = -w_x$，$\mathrm{d}Q/\mathrm{d}x = -w_y$，$\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = -Q$

$$\sum X = 0$$

所以　$N + \mathrm{d}N - N + w_x\mathrm{d}x = 0$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -w_x \tag{4.9}$$

$$\sum Y = 0$$

所以　$Q + \mathrm{d}Q - Q + w_y\mathrm{d}x = 0$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -w_y \tag{4.10}$$

① 分布荷载 w_x，w_y 不必是均布荷载。除了 w_x，w_y 剧烈变化的情况外，由于切断长度 dx 很小，故只要假定在切断部分中 w_x，w_y 保持常量即可。

$$\sum M = 0$$

取左侧截面(负面)与杆轴交点的矩,为

$$(M + \mathrm{d}M) - M + (Q + \mathrm{d}Q)\mathrm{d}x + w_y \cdot \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -\left(Q + \mathrm{d}Q + w_y \frac{\mathrm{d}x}{2}\right)$$

由于$\left(\mathrm{d}Q + w_y \frac{\mathrm{d}x}{2}\right)$与 Q 相比很小,故有以下关系成立

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -Q \qquad (4.11)$$

将受均布荷载作用的悬臂梁弯矩对 x 微分,由式(4.7)有

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-w}{2}x(l-x)\right) = \frac{-w}{2}(l-2x)$$

与式(4.6)比较,有关系 $\mathrm{d}M(x)/\mathrm{d}x = -Q(x)$。同时还可以说明:$M(x)$ 绝对值的最大值位于 $\mathrm{d}M(x)/\mathrm{d}x = 0$ 即 $Q = 0$ 的点处[①]。此外还可看出:当 w_y 为常数时,$Q(x)$ 为直线而 $M(x)$ 为二次曲线。当 w_y 为直线分布(x 的一次函数)时,$Q(x)$ 为二次曲线而 $M(x)$ 为三次曲线。这样,式(4.10)和式(4.11)是绘制内力图的有效公式。

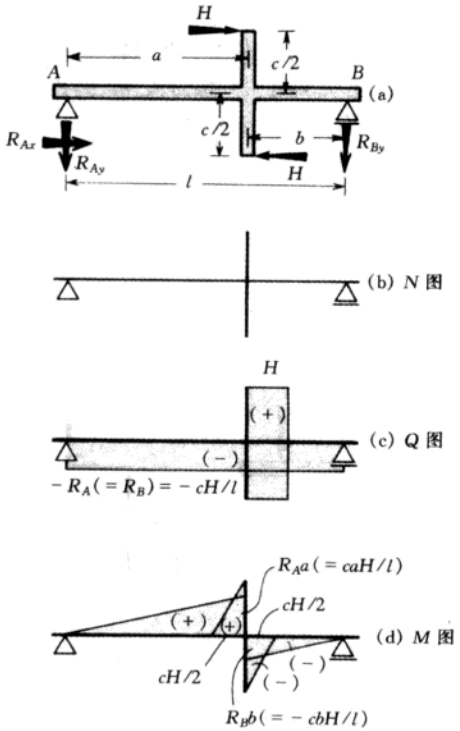


图 4.43 受力偶($M = Hc$)作用简支梁的反力和内力

(7) **受外力力矩作用的简支梁**

本节求解简支梁的另一个基本问题,如图 4.43 所示。初看该图容易产生误解,即认为有 $\sum X = 0$,$\sum Y = 0$ 成立便不需要求反力,但实际上此时 $\sum M = 0$ 并不成立。应在坐标系下用正规方法求解。设所有的反力(R_{Ax},R_{Ay},R_{By})取坐标的正向为正。根据力平衡式,有

$$\sum X = 0 \quad R_{Ax} + H - H = 0 \quad \text{所以} \quad R_{Ax} = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad R_{Ay} + R_{By} = 0 \quad \text{所以 } R_{Ay} = -R_{By}$$

$$\sum M = 0 \quad \text{对 } A \text{ 点取力矩,有}$$

$$R_{By} \cdot l + \frac{Hc}{2} + \frac{Hc}{2} = 0 \quad \text{所以} \quad R_{By} = -\frac{Hc}{l}$$

故有

$$R_{Ay} = \frac{Hc}{l}, \quad R_{By} = -\frac{Hc}{l}$$

① 一般而言,在函数微分值为零($\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x = 0$)的 x 处,$f(x)$ 有极值,即根据 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x = \tan\theta = 0$,在 $\theta = 0$ 处切线的斜率为零,因此 $f(x)$ 在曲线的峰值处达到极大值,而在谷底处为极小值。

求得反力后，可按前面悬臂梁例题的方法求解。当有不清楚之处可用常规的方法，即将梁切开，考虑切断部分（左右侧均可）的力平衡，然后计算截面上产生的内力。图 4.43(b) ～ (d) 为内力图。当外力为力矩作用时，解法与上述例题相似（图4.44）。

为使读者熟悉本解法，下面将结构分成悬臂梁（一端固定一端自由）和简支梁（铰和可动铰的二点支承），分别给出例题并求解。

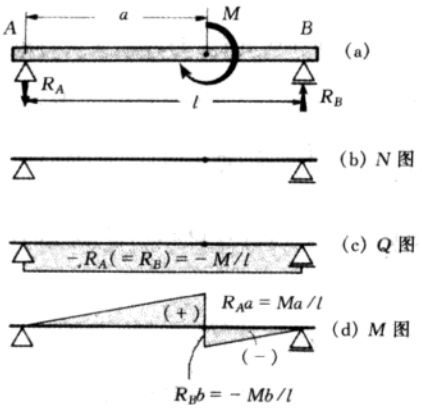


图 4.44　在梁上直接作用外力矩 M 时其主要部分的内力相同

[例题 1(A 级)]　求图 4.45(a) 所示悬臂梁的内力。

解　如图 4.45(b) ～ (d) 所示。

[例题 2(A 级)]　求图 4.46(a) 所示悬臂梁的内力。

解　如图 4.46(b) ～ (d) 所示。

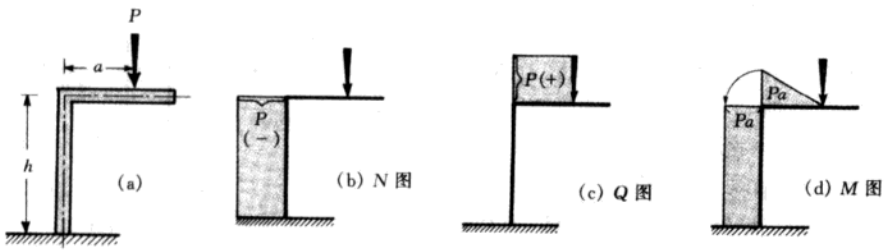


图 4.45　例题 1：有助于理解悬臂梁内力之间关系（N 与 Q，Q 与 M）的问题

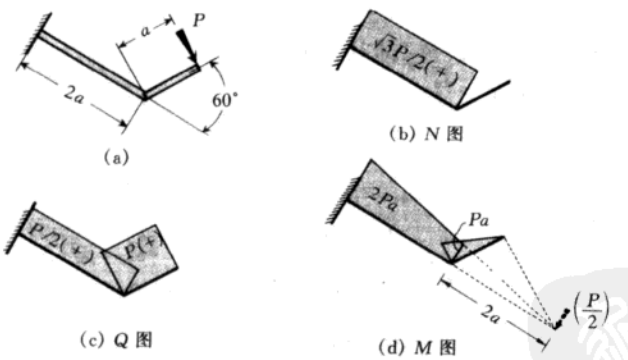


图 4.46　例题 2：悬臂梁的内力（在理解了例题 1 后则很容易）

[例题 3(B 级)]　绘出图 4.47(a_1) ～ (a_2) 所示悬臂梁的 M 图。

解　如图 4.47(b_1) ～ (b_2) 所示。

[例题 4(A 级)]　绘出图 4.48(a_1) ～ (a_4) 所示静定刚架的 M 图。

解　参照图 4.48(b_1) ～ (b_4)。

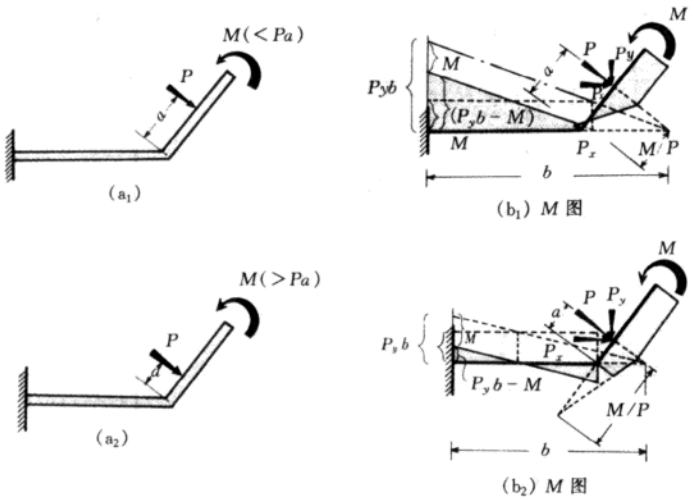


图 4.47 例题 3:悬臂梁的内力(例题 2 的应用)

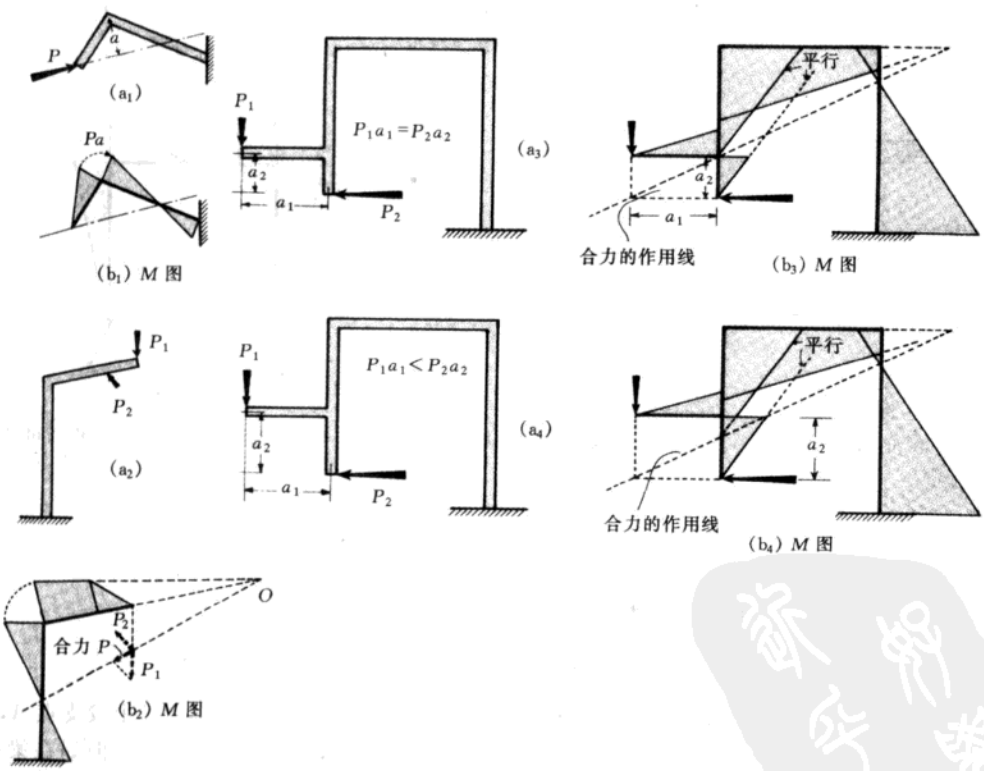


图 4.48 例题 4:绘悬臂梁的 M 图

[例题 5(A 级)] 绘出图 4.49(a) 所示简支梁的内力图。

解 图 4.49(b) ~ (d)。

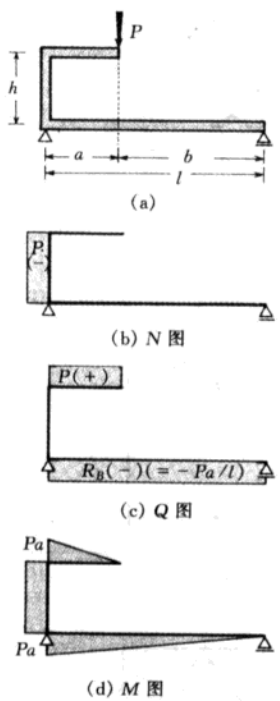


图 4.49　例题 5：求简支梁的内力

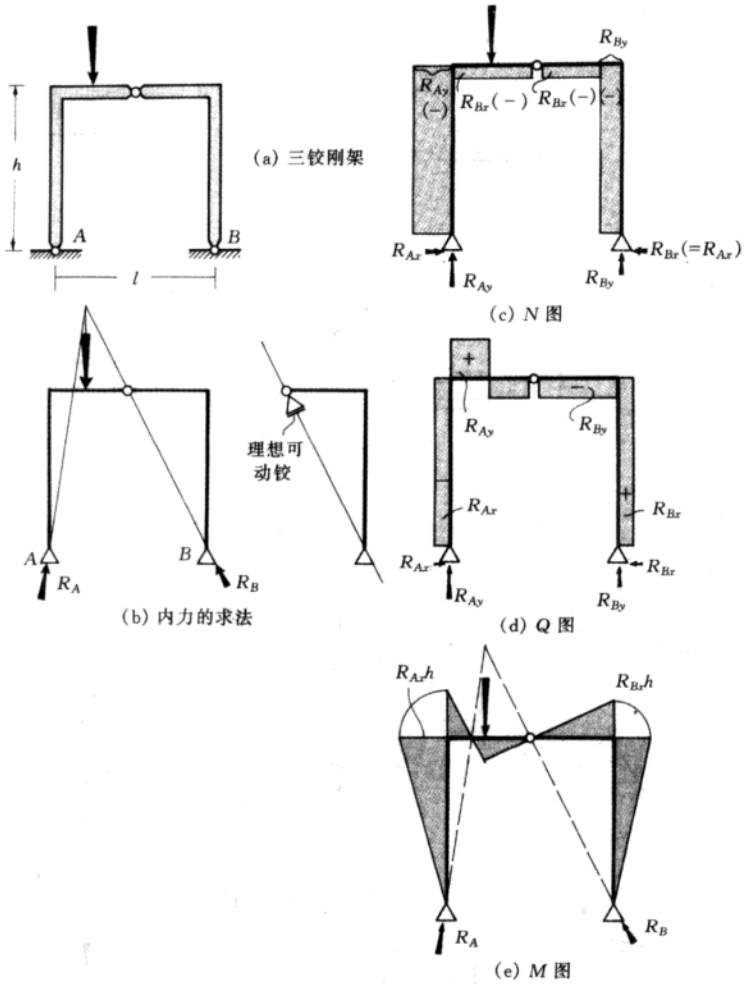


图 4.50　三铰结构的内力分析。将无中间荷载杆件两端的铰连接后作为可动铰



4.4　静定刚架

还有一种静定结构不包括在静定桁架，悬臂梁，简支梁的分类中。例如，由 2 个铰支点 A，B 支承的刚架，有 4 个反力：R_{Ax}，R_{Ay}，R_{Bx}，R_{By}，仅根据 3 个力平衡式不能算出反力。但如在梁中插入铰形成由 3 个铰构成的结构，由于在这个铰处可再建立一个力矩为零的公式，故对 4 个反力未知数有了 4 个方程便可求解。将上述结构称为**三铰结构**（图 4.50(a)）。

为求解三铰结构，可将无外力作用构件两端铰的连线方向作为反力方向（在桁架一节中已说明了，对无中间荷载的两端铰接杆件，由于仅有沿连接铰方向的力作用，故正好与可动铰支

座相同)。因此可如图 4.50(b) ~ (e) 所示,用与简支梁同样的方法求解。

用 3 个可动铰支承的结构,由于可动铰反力的方向已确定,故可用 3 个力平衡式来求解(图 4.51)。下面用例题来说明如何求静定结构的内力。



图 4.51 可动铰结构

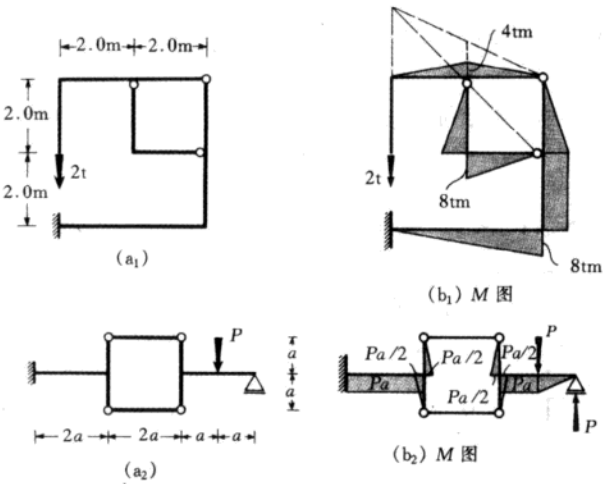


图 4.52 例题 6:求有铰静定刚架的 M 图(C 级)

[**例题 6(C) 级**] 绘出图 4.52(a_1) ~ (a_2) 所示静定结构的 M 图。

解 如图 4.52(b_1) ~ (b_2) 所示。



4.5 静定梁、静定刚架内力图作法要点(图 4.53(a) ~ (m))

(1) 内力的符号:见图 4.53(a)。其中 Q 与 M 的符号因人而异。



图 4.53(a)

(2) 内力图的画法:见图 4.53(b) 正内力画在柱的右侧或梁的上端(原则上是将 M 画在受拉侧)。

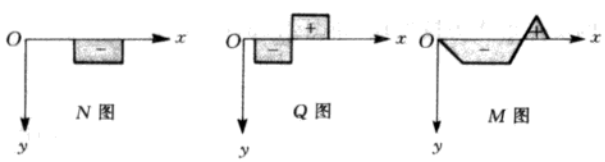


图 4.53(b)

(3) 当内力不明时,将不明部分切开,在截面处加上力和力矩使切断部分达到平衡状态。所加的力和力矩便是该截面的内力。

(4) 悬臂梁:从自由端出发向固定端作内力图。在集中荷载处的弯矩如图 4.53(c) 所示有折点。



图 4.53(c)

(5) 除悬臂梁以外,先求出反力再画内力图。只要求得反力后便可与悬臂梁一样求出内力。

(6) 在集中荷载加力点处的 M 图发生转折,即如同受箭头压力似地发生转折,见图 4.53(d)。

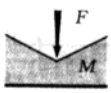


图 4.53(d)

(7) 在集中荷载加力点处的 Q 图沿力的作用方向以力的大小平移(图 4.53(e))。

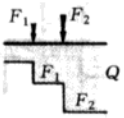


图 4.53(e)

(8) 只要没有外力矩作用,M 图保持连续。见图 4.53(f)。



图 4.53(f)

(9) 当受外力矩作用时,如同受 M 箭头压力似地 M 图以 M 的大小错动(图 4.53(g))。



图 4.53(g)

(10) 一个结构受多个集中荷载作用时,从一端开始画 M 图,从该端顺次求合力则该合力与结构交点处的弯矩为零(若有外力矩作用时,弯矩为零的点将与交点错开)。见图 4.53(h)。

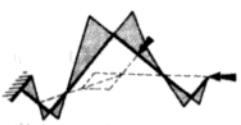


图 4.53(h)

(11) 有关系 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = -Q$,$\mathrm{d}Q/\mathrm{d}x = -w$ 成立,从支点到 x 对 w 积分则得 Q,对 Q 积分则得 M,故在 $Q = 0$ 点处 M 出现极值。

(12) 二个可动铰支座反力的交点可作为铰处理。如图 4.53(i) 所示。

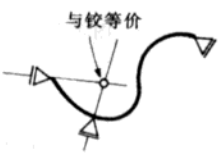


图 4.53(i)

(13) 对中间无外力的两端铰杆件,可作为其反力为沿二铰连线方向的可动铰处理。见图

4.53(j)。



图 4.53(j)

(14) 在结构中增加一个铰，则超静定次数减少一次。

(15) 轴对称结构上作用轴对称荷载时，反力和内力均与对称轴对称。因此位于对称轴上的铰与沿对称轴移动的可动铰相当。当该点连续时，它又相当于转动受约束(即不容许转动)的可动铰。如图 4.53(k)、(l) 所示。

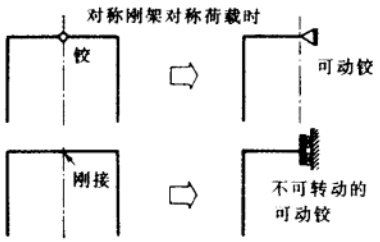


图 4.53(k)

图 4.53(l)

(16) 轴对称结构上作用反对称(点对称) 荷载时，对称轴上的点在对称轴方向不能变形，该点的弯矩等于零。因此，在对称轴上的点相当于可水平移动的可动铰支座。如图 4.53(m) 所示。

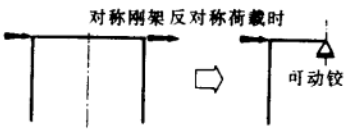


图 4.53(m)

掌握了以上的 16 个要点，在计算静定结构的内力时不会出错。



4.6 梁的基本公式

弹性体的力与变形的基本关系是**虎克定律**($F = Ku$)。如同物体的力与运动的基本关系是**牛顿第二定律**($F = ma$) 那样，**刚架**力与变形的基本关系是本节的**梁基本公式**($\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2 = M/EI$)。通过橡皮的弯曲实验可见，当物体受弯时发生挠曲。此时在物体内部产生的弯矩 M 与物体的挠度 v[①] 的关系是[②]

① 挠度 v 是指 y 方向的位移。一般将 x、y、z 方向的位移用 u、v、w 表示。当将坐标轴取为 x_1、x_2、x_3 或 1、2、3 时，相应各方向的位移为 u_1、u_2、u_3。

② 式(4.12) 是在约 300 年前的 1694 年由瑞士数学家伯努利提出的。也往往用 y 表示挠度，公式记为

$$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = M/EI$$

根据坐标系的取法和弯矩符号规定的不同，有时需在公式的右边加上负(−) 号(参照图 3.47)。即

$$\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2 = -M/EI$$

该式在日本应用较多。

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI} \tag{4.12}$$

式中，E 为**弹性模量**，是根据材料性质确定的常数[①]。例如用 E 值大的钢和 E 值小的橡皮制作出形状和大小同样的梁，令它们发生挠曲，则在同样的弯矩 M 值下，钢梁的 M/EI 值要比橡皮梁的小。当然，v 的大小、即“挠度值”也是钢梁的小，即 E 为表示**材料所具有的抵抗变形能力的量**（图 4.54）。

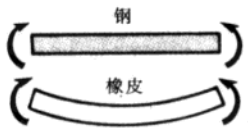


图 4.54 尺寸相同的钢梁和橡皮梁在同样大小的力矩作用下，橡皮梁更容易挠曲（因为 E 值小）

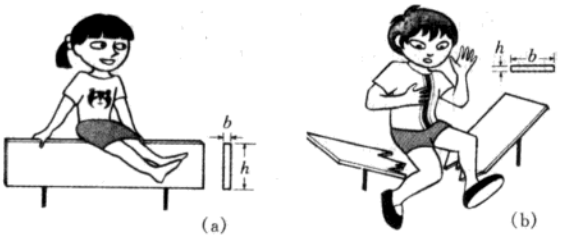


图 4.55 同样的长方形截面，竖着使用则 I 大故不易挠曲且坚固

I 称为**截面的二次矩**，它在本公式中初次出现，但实际上在日常生活中却是可经常体验到的量。图 4.55(a)，(b) 中，两梁的截面相同但其宽度和高度正好相反。大家都知道图 4.55(a) 的梁不容易挠曲和弯折。I 是由截面的形状和大小所决定的表示**不易挠曲的量**，尽管它被称为二次矩却不表示力学上矩的意义。它的量纲为长度的四次方（因此，单位是 1 cm^4，1 m^4），例如宽度为 $b = 1.5$ cm，高度为 $h = 2.0$ cm 的长方形截面的梁的 I 为 1 cm^4。



4.6.1 公式的推导

为得到式(4.12)，如图 4.56 所示，从梁切出长度 $\mathrm{d}s$ 的微元体 $\mathrm{d}V$ 进行研究。梁受外力作用在 y 方向产生位移 v（挠度）[②]，设梁内产生弯矩 M 时，微元体 $\mathrm{d}V$ 变形到 $\mathrm{d}V'$。这里假定在 z 方向不发生变形，将图 4.56 的 z 方向省略而改画成图 4.57。微元体 $\mathrm{d}V$ 可表示成 $ABCD$，$\mathrm{d}V'$ 可表示成 $A'B'C'D'$。当 $\mathrm{d}s$ 很小时，$A'B'C'D'$ 的变形近似于圆弧形，设圆弧的半径为 ρ。

再做一次橡皮的弯曲实验。当在橡皮的两端用手指加上大小为 M 的一组力矩（外力），则在橡皮内部应产生与该力矩大小相等的弯矩（内力）。此时观察橡皮，可见橡皮呈圆弧形弯曲，其一侧受拉而出现小的开裂，另一侧受压而收缩起皱（图 4.58）。

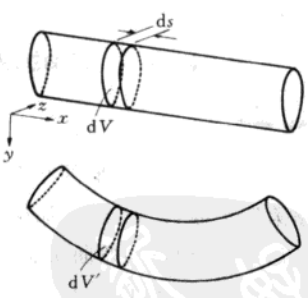


图 4.56 为研究受外力作用而挠曲的梁内力状态，切出长度为 $\mathrm{d}s$ 的微元体 $\mathrm{d}V$

① 正确地说，温度等也对 E 的数值产生影响，铁在 500℃ 时 E 值约减少一半。这里不考虑温度变化等的影响。

② 在 x 轴方向的位移是 w，它也是挠度。这里仅考虑不产生 w 的简单情况。

此时当然会使人设想在上下侧的中间、即橡皮的当中存在有既不拉伸也不压缩的面，即中性面。在第 3 章中已谈到，为了正确理解上述事实，结构力学学者花费了 200 年的时间(表 4.3)。在图 4.57 中将中性轴[①]用 EF 与 $E'F'$ 表示。这里使用了三个假定：

(1) 挠度 v 很小，因此转角 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 与 1 相比也很小。($|\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}x\ | \ll 1$)。称为**小挠度假定**。

(2) 变形前是平面的截面，在梁变形后仍保持平面(例如图中的 AB 截面为平面，则 $A'B'$ 截面也是平面)。称为**平面假定**。

(3) 忽略梁变形前后截面形状的微小差异。

设中性轴的圆弧 $E'F'$ 的半径为 ρ，从图 4.57 可清楚地看出

$$\mathrm{d}s = \rho \mathrm{d}\theta \tag{4.13}$$

在距离中性轴为 y 处的 GH，由于杆件变形而伸长(或缩短)。GH 的伸长 $\mathrm{d}a$ 可根据将 $A'B'C'D'$ 扩大的图 4.59 得到

$$\mathrm{d}a = y\mathrm{d}\theta \tag{4.14}$$

GH 的原长为 $\mathrm{d}s$。因此，由式(3.33)的应变公式有

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s} \tag{4.15}$$

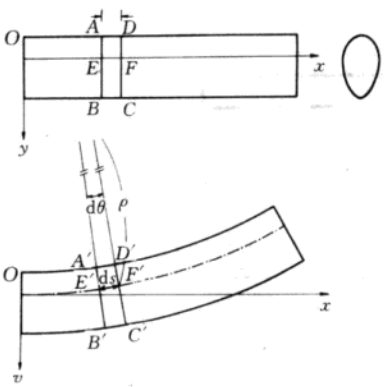


图 4.57 假定在 z 方向不产生变形，只考虑二维问题。图形表示用 $z=0$ 的平面将梁切断后所显示的截面。由于是用 $z=0$ 的平面切断故中性面为一条直线，称之为中性轴。图中的 $E'F'$ 相当于中性轴。EF 与 $E'F'$ 的长度保持不变为 $\mathrm{d}s$

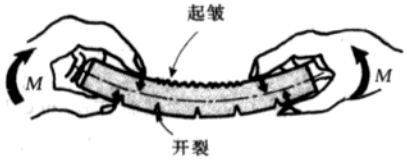


图 4.58 橡皮挠曲后在受弯的内侧收缩起皱，外侧受拉开裂。故在中央附近存在既不拉伸也不压缩的面，称之为**中性面**

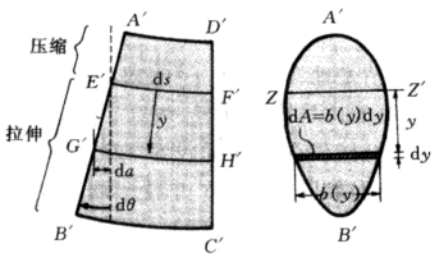
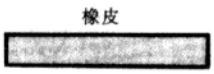


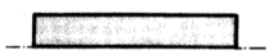
图 4.59 将图 4.57 的微元体放大后的图。也画出了用与杆轴垂直的面将微元体切开后的截面。弯曲的微元体在 $\mathrm{d}s$ 很小时可认为变形为圆弧形。该圆的半径为 ρ。设与 EF 相距 y 的 GH 在变形后变为 $G'H'$，则伸长 $\mathrm{d}a = y\mathrm{d}\theta$。$G'H'$ 的应变为 $\varepsilon = \mathrm{d}a/\mathrm{d}s = y\mathrm{d}\theta/\rho\mathrm{d}\theta = y/\rho$。因此，应力为 $\sigma = \varepsilon E = Ey/\rho$

① 如图 4.56 所示，从空间看应为中性面，而如图 4.57 所示从切开的 z 平面来看则为线，故称为中性轴。对沿 x 面切开的情况，也同样称为中性轴。

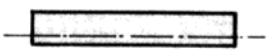
表 4.3　中性轴的取法



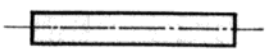
将既不拉伸也不压缩的面(轴)称为中性面(轴)。



马义尔(Mariotte,法国,1620 ～ 1684),伯努利(Bernoulli,法国,1654 ～ 1705),正确推导了 $EI/\rho = M$ 的公式,但将中性轴取在梁的下侧。



吉拉德(Girard,法国)在 1798 年的著作中记叙了中性轴位于梁内部。



巴伦(Parent,法国,1666 ～ 1716)首先对中性轴有了正确的理解(但他的论文中印刷错误很多,故被忽视)。



库仑(法国,1736 ～ 1806),他是 18 世纪对弹性力学贡献最大的人,在土压、岩石、压缩破坏、扭转振子、电气的领域中均有建树。他对线性材料(虎克材料)和非线性材料(非虎克材料)的中性轴取法均是正确的。

纳维(法国,1785 ～ 1836)是伟大的数学家,在 1819 年的讲义笔记中关于中性轴取法是错误的。而在 1826 年的修正笔记中正确地取对了中性轴。此外他在塞纳河的设计中也失败了。当时法国在理论上有优势而在工程方面却是英国有优势。此时正是工业革命后经过了一个世纪。

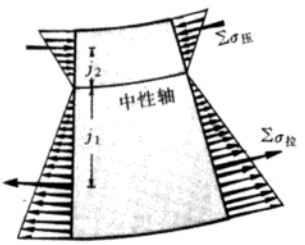
将之代入式(4.13)、式(4.14)有

$$\varepsilon = \frac{y\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{y}{\rho}$$

根据式(2.1),应力为

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho} \tag{4.16}$$

从公式可清楚地看出,应力 σ 的大小与相距中性轴的距离 y 成正比,在截面内呈线性分布。



$\Sigma\sigma_{压} = \Sigma\sigma_{拉}$

$M = j_1\Sigma\sigma_{引} + j_2\Sigma\sigma_{压}$

图 4.60　沿截面 $A'B'$ 和 $C'D'$ 画应力。由于没有轴向作用力,故 $\sigma\mathrm{d}A$ 的总和必须为零

由于杆件仅受弯曲而没有轴向外力作用,轴力为零。因此,将应力 σ 乘以面积 $\mathrm{d}A$ 并就全面积相加所得的内力应为零[①],即有下式成立(图 4.61)。

$$\int_A \sigma\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_y y\overbrace{b(y)\mathrm{d}y} = 0^{②}$$

因此,为使该式成立,(由于 $E/\rho \neq 0$)必须有以下关系

$$S = \int_y yb(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{4.17}$$

式(4.17)是求截面 zz' 轴的**截面一次矩**(S)公式,$S = 0$ 表示 zz' 通过形心。这个简单的公式表

① 轴力即使为零应力 σ 也不一定为零。在产生弯矩的杆件中,如图 4.61 所示存在着随远离中性轴而加大的拉伸和压缩应力。将 $\sigma \cdot \mathrm{d}A$ 合成(沿全截面积分)的结果应等于轴力。如此时轴力为零,则积分的结果应为零。

② 积分的范围为截面上 y 的上限到下限。由于该范围覆盖了全截面,为记叙方便用记号 $\int_A$ 表示。

示“中性轴通过形心”，但即使是著名的结构力学家纳维最初也没有发现。

下面将 σ 对中性轴取矩。在图 4.60 中由压缩和拉伸分别画出 σ 的合力（箭头）也可看出，应力的矩不为零。该力矩正是将梁作为杆件建立模型时在截面上产生的内力弯矩（图 4.61）。将这个关系用公式来表示，即应力对中性轴的矩为

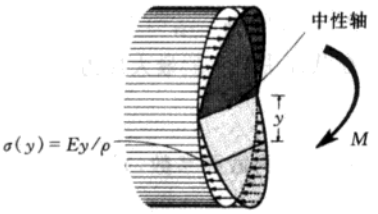


图 4.61 应力随离中性轴的距离成比例增大

$$\int_A \sigma \mathrm{d}A \cdot y = \int_y \sigma y b(y) \mathrm{d}y = \frac{E}{\rho}\int_y b(y) y^2 \mathrm{d}y = \frac{EI}{\rho} = M \tag{4.18}$$

式中

$$I = \int_y b(y) y^2 \mathrm{d}y \tag{4.19}$$

这里又出现了在本节开始时说明过的截面二次矩 I。I 的值随计算 y 长度基准轴 zz' 的位置而不同，当 zz' 通过形心时将 I 加上脚标记为 I_0。此外，从“绕 z 轴”的意义考虑，对 M，I 有时也加上脚标记为 M_z，I_z（在本书当不会产生误解时，省略了脚标）。

式（4.18）为表示 M 与 $1/\rho$ 关系的公式。EI 愈大则对同样的弯矩 $1/\rho$（**曲率**）[①] 愈小，这表示弯曲程度减小即不容易变形。

那么，挠度（面外位移，这里是指 y 方向的位移 v）与 M 的关系又是怎样，这里有 v 与曲率的关系式[②]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \frac{1}{[1+(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)^2]^{3/2}}$$

该式在 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x \ll 1$ 的条件下，有近似公式

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}$$

代入式（4.18）可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{（前文 4.12）}$$

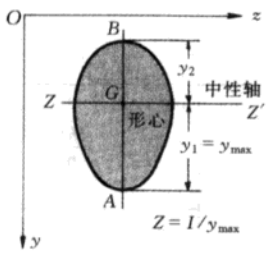


图 4.62 在 A 点和 B 点所产生的应力是边缘应力



图 4.63 工字形截面使用的材料较少但却不易挠曲，因此在梁中得到广泛的应用

① 将曲率半径 ρ 的倒数 $1/\rho$ 称为曲率。

② 在附录 2 中有该式的推导。

这就是**梁的基本公式**。在前面已说过，过去在大专、大学中结构力学的中心就在于该式。当然，目前它仍是结构力学中最重要的公式之一。此外，顺便说说另一个很重要的公式，即弯矩 M 在截面中产生的**最大应力**可由下式表示

$$\sigma_f = \frac{M}{Z} \tag{4.20}$$

式中，Z 称为**截面系数**，其定义为

$$Z = \frac{I}{y_{\max}} \tag{4.21}$$

在同一截面中，y 愈大即与中性轴相距愈远则 σ 愈大，这可从式(4.16)、式(4.18)推导出的式(4.22)看出

$$\sigma = \frac{M}{I}y \tag{4.22}$$

从这个重要的公式可看出，在截面边缘处的应力[①]最大。由于边缘包括了两侧，设两者中的大者(y_1，y_2 中的大者)为 $y_{\max}$，则(4.22)式为

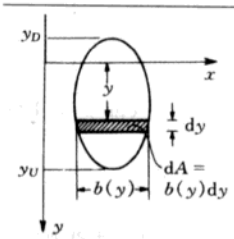
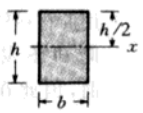
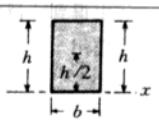
$$\sigma_f = \frac{M}{I}y_{\max} \tag{4.23}$$

从而可得

$$\sigma_f = \frac{M}{I/y_{\max}} = \frac{M}{Z} \qquad \text{(前文 4.20)}$$

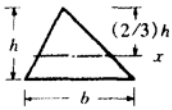
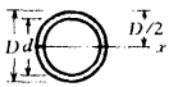
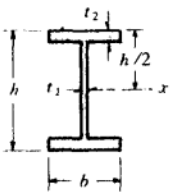
(当 $y_2 = y_{\max}$ 时，即压缩一侧的边缘应力最大时，σ_f 为**压应力**(−))。表 4.4 表示对代表性截面 I 和 Z 的求法。

表 4.4　各种截面的截面积(A)，截面二次矩(I)，截面系数(Z)的计算公式

截面	截面积	形心轴到边缘的距离	关于 x 轴的截面二次矩 单位：长度的 4 次方	截面系数 单位：长度的三次方
	A	$\dfrac{\int_{y_D}^{y_U} b(y)y\,dy}{A}$	$I = \int_{y_D}^{y_U} b(y)y^2\,dy$ $= I_0 + Ay_0^2$ (I_0 是关于形心轴的截面二次矩)	$\dfrac{I}{\max(y_U, \lvert y_D \rvert)}$
	bh	$\dfrac{h}{2}$	$\dfrac{bh^3}{12}$	$\dfrac{bh^2}{6}$
	bh	$\dfrac{h}{2}$	$\dfrac{bh^3}{3}\left(=\dfrac{bh^3}{12}+bh\left(\dfrac{h}{2}\right)^2\right)$	$\dfrac{bh^2}{3}$

① 称之为**边缘应力**。当像本书那样将作用在正面上的正向应力(或负面上的负向应力)定义为正应力时，式(4.22)应写成 $\sigma = (-M/I)y$ 的形式，对应力的方向而言是正确的表达式，但在不会引起误解时，一般不写(−)号。

续表 4.4

截面	截面积	形心轴到边缘的距离	关于 x 轴的截面二次矩 单位：长度的 4 次方	截面系数 单位：长度的三次方
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$
	$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^3}{32}$
	$\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}\left(\frac{D^4-d^4}{D}\right)$
	$bh-(b-t_1)\times(h-2t_2)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{12}[bh^3-(b-t_1)(h-2t_2)^3]$	$\frac{1}{6}\left[bh^2-\frac{(b-t_1)(h-2t_2)^3}{h}\right]$

* 表示从 x 轴到形心的距离（y_0）

当应力超过一定值后，应变急剧增加，材料破坏。因此根据不同的材料确定了其能承受的应力，将之称为容许应力。故在设计梁时，必须确保最大应力 σ_{max}（最大弯矩 M_{max} 产生的边缘应力）小于容许应力 f_b，即 $\sigma_{max} < f_b$。



4.6.2 公式的应用

梁的基本公式（式(4.12)）表现形式简单，它是二阶常微分方程，为了求挠度 v（y 方向的位移）必须求解该微分方程。一般弯矩 M 为 x 的函数，可表示为 $M = M(x)$。同时，当梁截面保持不变时 EI 为常数，而对变截面梁 I 为 x 的函数，可表示为 $I = I(x)$。若梁的各部分材料也是不同的，则还需考虑 $E = E(x)$。因此，式(4.12)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{（前文 4.12）}$$

的右边部分在总体上应为 x 的函数。其形式应改为

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E(x)I(x)} = f(x) \qquad (4.24)$$

可求得该微分方程的解[①]为

① $f(x)$ 和 $\int f(x)dx$ 必须是可积分函数。在设计实际的梁或柱时使用的 $f(x)$ 一般为二次可积函数，即使是复杂的函数也可用近似式进行简化。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dx}&=\int f(x)dx+c_1\\ v&=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+c_1x+c_2\end{aligned}\right\}\quad(4.25)$$

式中，c_1，c_2 为积分常数。

举例说明，试求在自由端作用外力矩 M 的悬臂梁（长度 l，截面为 $b\times h$ 的长方形截面，弹性模量为 E）的挠度 v 及边缘应力 σ_f（图 4.64(a)）。首先由于弯矩 $M(x)$ 为常量（图 4.64(b)），E，I 也为常量，故

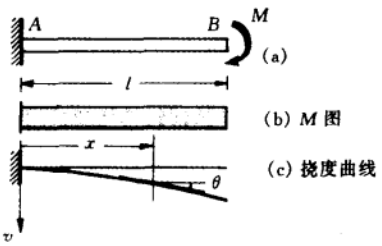


图 4.64 梁基本公式的直接应用（求受常力矩作用的悬臂梁的挠度 v 及转角 θ）

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M(x)}{E(x)I(x)}=\frac{M}{EI}=c_0\text{（常数）}$$

将它积分一次，可得

$$\frac{dv}{dx}=\int c_0dx=c_0x+c_1$$

积分常数 c_1 的选择必须满足该悬臂梁的条件。dv/dx 表示对 v 曲线（挠度曲线）所引的切线的斜率（$\tan\theta$）（参照图 4.64(c) 及 1.4 节）。由于 θ 很小[①]故有 $\tan\theta\approx\theta$，即 dv/dx 为变形后梁在 x 处的**转角**。在 $x=0$ 的点即固定端 A，根据固定的条件，有 $\theta=0$。将该条件代入上式，有

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0}=(c_0x+c_1)_{x=0}=c_1=0$$

由此可得

$$\frac{dv}{dx}=c_0x$$

对此再积分，可得挠度 v

$$v=\frac{c_0}{2}x^2+c_2$$

这里再一次引入新的积分常数。由于该式是位移公式，故必须根据位移的条件来讨论 c_2。仍对 $x=0$ 的固定端进行考察，固定端处不仅是转角而且位移也必须为零，即有条件：在 $x=0$ 处 $v=0$。

根据上述条件有

$$(v)_{x=0}=\left(\frac{c_0}{2}x^2+c_2\right)_{x=0}=c_2=0$$

最终可得

$$v=\frac{c_0}{2}x^2=\frac{M}{2EI}x^2\qquad(4.26)$$

根据式(4.26) 可知，此时的 v 曲线（挠度曲线，位移曲线）为通过原点的抛物线。

另一方面，求梁截面内的应力不必先求得挠度 v，而在求得弯矩的阶段即可计算。对长方形截面的二次矩 I 可在式(4.19) 中令 $b(y)=b$（常数），且形心位于截面的中央（$b/2$，$h/2$），计算如下

$$I=\int_A b(y)y^2dy=b\int_{-h/2}^{h/2}y^2dy=b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}$$

① 在推导梁基本公式时使用了 $dv/dx\ll1$ 的条件（参照 4.6.1 节）。

$$= \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(\frac{-h}{2}\right)^3\right] = \frac{bh^3}{12}$$

长方形截面 $b \times h$ 关于形心的 I 计算公式为

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{4.27}$$

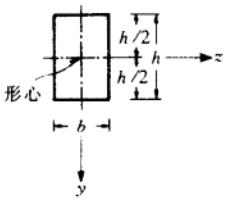


图 4.65 长方形截面。截面二次矩 $I = bh^3/12$

该公式在今后经常用到，故应记住。

在式(4.21)中有 $y_{max} = h/2$(形心正好在正中)，故截面系数为

$$Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \tag{4.28}$$

利用上述结果，假定 $b = 30$ cm，$h = 40$ cm 的混凝土梁，计算它能承受多大的弯矩。设混凝土的容许弯曲拉应力 $f_h = 80$ kgf/cm²(相当于优质的混凝土)。将 b, f, f_h 代入关系式

$$\sigma_t = \frac{6M}{bh^2} < f_h$$

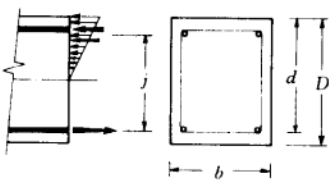


图 4.66 求钢筋混凝土梁的容许弯矩的简化公式 $M = a_t f_t j$

有

$$M < 6.4 \times 10^4 \text{ kgf} \cdot \text{cm} = 0.64 \text{ t} \cdot \text{m}$$

该 M 值与实际建筑物设计的 M 相比是相当小的值。一般设计中认为，不配置钢筋的混凝土构件 f_h 为零。因此对受弯的梁必须配置钢筋。

配筋梁的容许弯矩 M 在多数情况下用以下简化公式计算

$$M = a_t f_t j \tag{4.29}$$

式中，a_t —— 受拉侧的钢筋面积；

f_t —— 钢筋的容许拉应力；

j —— 截面内由受拉筋承受的拉应力与混凝土及受压筋承受的压应力的合力之间距离，一般可取 $j = d \times 7/8$(图 4.66)。

例如设 $D = 40$ cm($d = 35$ cm)的梁，配筋为 $a_t = 11.4$ cm²(22 mm 的钢筋三根)，设 $f_t = 1.6$ t/cm²，则该梁可承受的弯矩为

$$M = 11.4 \times 1.6 \times 35 \times \frac{7}{8} = 558 \text{ t} \cdot \text{cm} = 5.58 \text{ t} \cdot \text{m}$$

下面通过例题 1 ～ 4，进一步加深对梁的基本公式和截面应力的理解。

[例题 1(A 级)] 有宽 11.1 cm，高 18 cm 长方形截面的杉木材料。当用它作为跨度 4 m 的简支梁时，该梁可承受多大的重量(设为一点集中荷载)，设杉木的 $f_h = 60$ kgf/cm²。

(答案：360 kgf(3.67kN) 以下)

解 设荷载为 F，在加力点处的弯矩为最大，其值为

$$M = \frac{-Fab}{l} = \frac{-Fa(l-a)}{l}$$

因此，在 $a = b = l/2$ 处的 M 达到最大值

$$|M_{max}| = \frac{Fl}{4}$$

在本问题中，$l = 4.0$ m，故 $|M_{max}| = F$ (kgf · m)。

另一方面，有公式

$$I=\frac{bh^3}{12}\qquad\text{（前文 4.27）}$$

$$Z=\frac{I}{h/2}=\frac{bh^2}{6}\qquad\text{（前文 4.28）}$$

对本例，由于 $Z=11.1\times(18)^2/6=6.0\times10^2\ \text{cm}^3$，故

$$\sigma_{\max}=\frac{|M_{\max}|}{Z}=\frac{F\times10^2}{6.0\times10^2}<f_b$$

所以　　$F<6f_b=360\ \text{kgf}$

当用 SI 单位制计算时，$f_b=5.88\times10^6\ \text{Pa}$，$Z=6.0\times10^{-4}\ \text{m}^3$，故有

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{6.0\times10^{-4}}<5.88\times10^6$$

所以　　$F<3.53\times10^3\ \text{N}(1\ \text{Pa}=1\ \text{N/m}^2)$

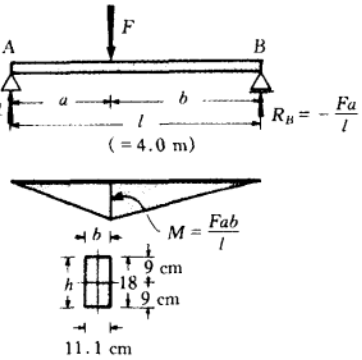


图 4.67　例题 1：检验用杉木材料制成的简支梁承载能力的问题，本例表明了梁基本公式在实际结构设计中是经常使用

[例题 2(A 级)]　如图 4.68 所示，对杆端 B 受外力 P 作用的悬臂梁求杆端 B 的挠度及转角。

解　直接应用梁基本公式

$$\begin{cases}\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2=M(x)/EI\\ M(x)=P(l-x)\end{cases}$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{P}{EI}(l-x)\qquad\text{(a)}$$

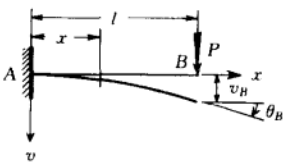


图 4.68　例题 2：直接应用梁基本公式 $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2=M/EI$ 的例题，通过求解微分方程求出梁的挠度 v，并在此过程中求出转角 θ

对式(a)积分可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{P}{EI}\left[\frac{-(l-x)^2}{2}+c_1\right]\qquad\text{(b)}$$

c_1 为积分常数。在学习数学时有人往往忽视了积分常数的重要性。实际上在求解实际问题时，由于积分常数直接反映了边界条件和支承条件，故起到了十分重要的作用。

$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 是挠度曲线的斜率 θ。将在 $x=0$(固定端)处 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x=0$ 的固定支承条件代入式(b)。有

$$0=\frac{P}{EI}\left(-\frac{l^2}{2}+c_1\right)\qquad\text{所以}\quad c_1=\frac{l^2}{2}\qquad\text{(c)}$$

由此，式(b)变成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\theta=\frac{P}{EI}\left[\frac{-(l-x)^2}{2}+\frac{l^2}{2}\right]\qquad\text{(d)}$$

将式(d)再次积分，可得

$$v=\frac{P}{EI}\left[\frac{(l-x)^3}{6}+\frac{l^2x}{2}+c_2\right]\qquad\text{(e)}$$

c_2 也是积分常数。现在利用 $x=0$(固定端)处 $v=0$(无位移)的条件。可得

$$0=\frac{P}{EI}\left(\frac{l^3}{6}+c_2\right)\qquad\text{所以}\quad c_2=-\frac{l^3}{6}$$

因此式(e)变为

$$v=\frac{P}{EI}\left[\frac{(l-x)^3}{6}+\frac{l^2x}{2}-\frac{l^3}{6}\right]\qquad\text{(f)}$$

整理后为

$$v=\frac{Px^2}{6EI}(3l-x)$$

因此，在 $B(x=l)$ 点处的挠度为

$$v_B=\frac{Pl^3}{3EI} \tag{g}$$

而 B 点处的转角为

$$\theta_B=\frac{Pl^2}{2EI} \tag{h}$$

[例题 3(B 级)] 求图 4.69(a) 所示超静定梁的内力。

解 根据力的平衡式仅能求得 A 点的反力 $R_{Ax}=0$，为确定 R_{Ay}、R_B、M_A 所需的公式尚缺少一个。因此必须考虑变形再建立一个公式。此时，需用到可动铰支座 B 点挠度为零的条件。即

(1) 对去掉可动铰支座的静定梁求得自由端 B 的挠度 v_B(图(b))。

(2) 将未知反力 R_B 作用在自由端，求得此时 B 点的挠度 v'_B(负)(图(c))。

(3) 图(a)的状态为叠加(1)和(2)的状态，为满足 $v_B+v'_B=0$ 的条件可求得 R_B 的公式。

(1) 求 v_B：可用梁的基本公式来求得。本例可利用例题 2 的结果求解。将图 4.68 所示梁的自由端再延长 l，此时梁前端的挠度可利用式(g)、(h)得到

$$\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{Pl^2}{2EI}\times l=\frac{5Pl^3}{6EI}$$

则图 4.69(b) 自由端的挠度只需将上式的 l 改为 $l/2$ 即可

$$v_B=\frac{5Pl^3}{48EI}$$

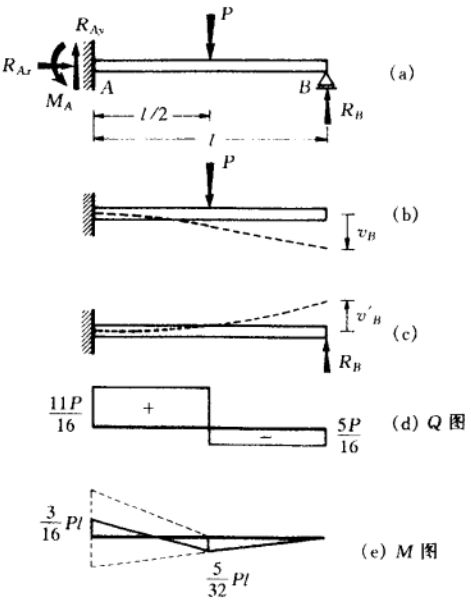


图 4.69 考虑变形求解超静定梁

(2) 求 v'_B：这也可由式(g)直接得到

$$v'_B=-\frac{R_Bl^3}{3EI}$$

(3) 图 6.69(a) 的梁是(1)和(2)叠加的状态，故有

$$v_B+v'_B=\frac{5Pl^3}{48EI}-\frac{R_Bl^3}{3EI}=0 \quad \text{所以} \quad R_B=\frac{5}{16}P$$

根据这个结果可求出其它反力。在绘制内力图时，很明显地可将图 4.69(b) 梁的内力图与图 4.69(c) 梁的内力图叠加即可(图4.69(d)、(e))。

[例题 4(A 级)] 求受均布荷载 w 作用下简支梁中央点的挠度和支点的转角。

解 根据式(4.8)有

$$M(x)=\frac{-wx(l-x)}{2}$$

将之代入梁基本公式

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{w}{2EI}x(l-x) \quad \text{所以} \quad \frac{dv}{dx}=-\frac{w}{2EI}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}+c_1\right)$$

从边界(支承)条件得不到任何关于 dv/dx 的信息，故需再次积分。得

$$v=-\frac{w}{2EI}\left(\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}+c_1x+c_2\right)$$

关于 v，有 $x=0$ 处 $v=0$ 和 $x=l$ 处 $v=0$ 二个条件。即有

$$x=0 \text{ 处 } v=0,\qquad \text{所以}\quad c_2=0$$

$$x=l \text{ 处 } v=0,\qquad \text{所以}\quad c_1=-\frac{l^3}{12}$$

因此可得

$$v=-\frac{w}{2EI}\left(\frac{x^4}{12}-\frac{lx^3}{6}+\frac{l^3x}{12}\right)=\frac{w}{24EI}(x^4-2lx^3+l^3x)$$

可将 $x=l/2$ 代入上式，得中点的挠度，

$$v_c=\frac{5wl^4}{384EI}$$

进而，将 $x=0$，$x=l$ 代入公式得支点 A、B 的转角为

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{w}{2EI}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}+c_1\right)=-\frac{w}{2EI}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{l^3}{12}\right)$$

即得

$$\theta_A=\frac{wl^3}{24EI},\ \theta_B=-\frac{wl^3}{24EI}$$

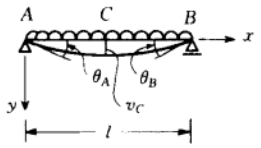
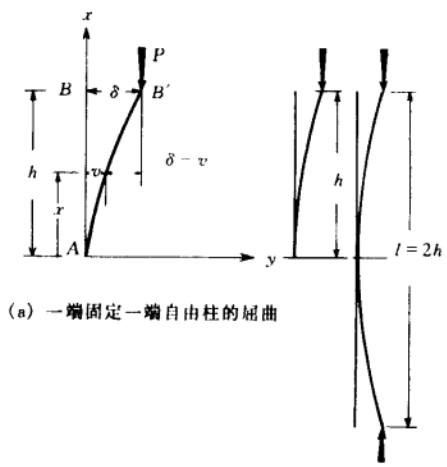


图 4.70　例题 4：与例题 2 同样根据梁的基本公式直接求 v、θ 的问题。只是在利用边界条件求积分常数方面，可看出简支梁与悬臂梁有很大不同

[例题 5(B 级)]　对细长杆作用轴向压力，当力逐渐加大时杆会突然发生弯曲变形，同时对外压的抵抗能力骤降。将这样的现象称为**屈曲**现象。求长度为 l、截面积为 A、截面二次矩为 I、弹性模量为 E 的杆发生屈曲时外力的大小(**屈曲荷载**)。

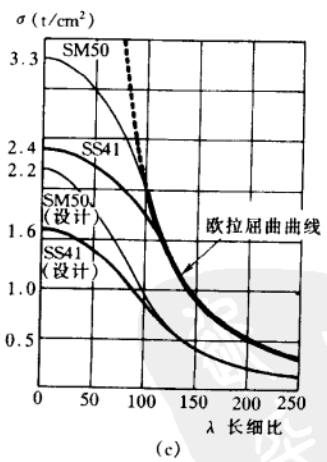
解　当将钢等高强度材料用作柱或桁架等的受压杆件时，经常发生屈曲现象，由于屈曲构成了结构总体脆性破坏的原因，故是结构设计上一个重要的问题。

求解这一类问题常用的方法是，就现象发生后的状态建立力和变形的方程式。如图 4.71(a) 所示，设由于



(a) 一端固定一端自由柱的屈曲

(b) 两端铰接杆件的屈曲
(利用图(a)进行推导)



(c)

图 4.71　例题 5：由于建筑物是为抵抗重力而建造的，故其柱经常受压。对受压柱，屈曲是一个重大问题。梁的基本公式也应用于屈曲现象的分析中。图(c)中给出了常用的钢材 SS41[1] 和 SM50[1] 的屈曲应力 σ_{cr} 和容许应力 σ_{allow} 的对比

外力 P 的作用使杆从 AB 移动到 AB'，则距 A 点 x 处点的弯矩为

$$M(x) = P(\delta - v)$$

式中 δ 为 B 点的挠度（$\delta - v_B$），设 $P/EI = k^2 (P/EI > 0)$，梁的基本公式为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{P}{EI}(\delta - v) = k^2(\delta - v) \tag{a}$$

求解式(a)，可得下式

$$v = \delta(1 - \cos kx) \tag{b}$$

将边界条件 $x = h$，$v = \delta$ 代入可得

$$\delta = \delta(1 - \cos kh)$$

这样可能有两个解

$$\delta = 0 \text{ 或 } (1 - \cos kh) = 1$$

其中 $\delta = 0$ 相当于仅在轴向产生变形，故不是屈曲问题的解。因此解应为 $(1 - \cos kh) = 1$，由此得 $\cos kh = 0$。即

$$kh = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \cdots \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，可得

$$v = \delta\left(1 - \cos\frac{2m-1}{2h}\pi x\right) \quad m = 1, 2, \cdots \tag{d}$$

式(d)表示屈曲变形后的形状，$m = 1, 2, \cdots$ 分别对应于一次、二次、…… 的屈曲模态。

屈曲荷载可通过改写式(c)求得

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{2m-1}{2h}\pi \tag{e}$$

由此可得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (2m-1)^2 EI}{(2h)^2} \tag{f}$$

式中的 cr 脚标为 critical（临界值）的缩写，一般用 P_{cr} 表示屈曲荷载。m 愈小则 P_{cr} 也小，因此 $m = 1$ 的屈曲模态最容易发生且构成设计上最严格的条件，故一般仅取 $m = 1$ 时的值，写成

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2h)^2} \tag{g}$$

式(g)为一端固定一端自由杆件的屈曲荷载公式。

对两端铰接的情况，屈曲时的变形如图 4.71(b)所示。将上面研究过的一端固定一端自由柱的高度扩大二倍，即取 $l = 2h$，便正好与图 4.71(b)相同，代入式(g)得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{h}$$

该式为两端铰接杆件的屈曲荷载公式。

钢结构中受压构件需考虑屈曲来确定容许应力，下面就屈曲应力 σ_{cr} 作一些补充说明。用平均内力来表示，即用面积除式(h)的两边可得

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2}\left(\frac{I}{A}\right)$$

设式中的 $I/A = i^2$（i 称为截面二次半径或回转半径[1]）有

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 Ei^2}{l^2}$$

进而设 $l/i = \lambda$（称 λ 为**长细比**）[2]，可得

[1] i 是表示截面面积偏离形心程度的量，它相当于统计学中的“方差”，i 为其平方根，故相当于“标准偏差”。

[2] λ 愈大，则为愈细长的杆件。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{\lambda^2}E \tag{4.30}$$

称式(4.30)为欧拉屈曲曲线(图 4.71(c))。将 λ 与 σ_{cr} 的关系用图表示，如图 4.71(c)所示。当 $\lambda \to 0$ 时 $\sigma_{cr} \to \infty$(图中的虚线)，表明在 λ 小的范围内，式(4.30)与实际现象不符，即对于不管 λ 如何小也不发生屈曲的杆件，实际上它所能承受的应力是有限的。例如对 SS41 在 $\sigma = 2.4\ \mathrm{t/cm^2}$ 时屈服，而在略超过 $\sigma = 4.1\ \mathrm{t/cm^2}$ 时即破坏。因此，当 λ 小于某个值时便与式(4.30)不符。式(4.30)成立时的 λ 最小值称为临界长细比(Λ)。在实际的钢柱设计中，考虑到杆件在开始时多少会有些变形(即**初始应变**)或荷载作用有偏心等因素，采用用安全系数 υ 除过的曲线。同时在 λ 小于 Λ 时使用考虑了安全系数的近似公式。

对钢结构建筑物，认为 $\sigma_{cr} \leqslant 0.6\sigma_y$ 的范围为发生欧拉屈曲的领域。因此由

$$\sigma_{cr} = 0.6\sigma_y = \pi^2 E/\Lambda^2$$

可得临界长细比

$$\Lambda = \sqrt{\pi^2 E/0.6\sigma_y}$$

将 $\lambda > \Lambda$ 的杆件称为长柱，而将 $\lambda < \Lambda$ 的杆件称为短柱。为给出容许应力 f_c，对短柱可方便地使用公式

$$f_c = \frac{\left[1 - 0.4(\lambda/\Lambda)^2\right]\sigma_y}{\upsilon},\ \upsilon = 1.5 + \frac{2}{3}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2$$

另一方面，对长柱用被安全系数除过的欧拉公式

$$f_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \upsilon},\ \upsilon = 2.17 \quad (\text{式中，}\upsilon\text{ 为安全系数})$$

例如，对厚 30 mm、外形为 48 cm×48 cm 的两端铰支的长度为 10 m 和 30 m 的方管，可如下求出**长期容许荷载**[1]。

$$A = 48^2 - (48 - 3\times 2)^2 = 5.4\times 10^2\ (\mathrm{cm^2})$$

$$I = \frac{1}{12}\left[48^4 - (48 - 3\times 2)^4\right] \approx 1.83\times 10^5\ (\mathrm{cm^4})$$

所以 $i = \sqrt{\dfrac{I}{A}} = \sqrt{\dfrac{18.3}{5.4}} \times 10 = 18.4\ (\mathrm{cm})$

设 $E = 2.1\times 10^4\ \mathrm{t/cm^2}$。

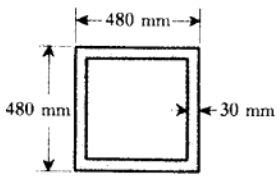


图 4.72 方形钢管的截面

下面在表 4.5 中给出计算过程和结果。

表 4.5

使用钢材	SS 41	SM 50
屈服应力 σ_y	$2.4\ \mathrm{t/cm^2}$	$3.3\ \mathrm{t/cm^2}$
临界长细比 Λ $\sqrt{\pi^2 E/0.6\sigma_y}$	$\Lambda_{41} = 120$	$\Lambda_{50} = 102$
$l = 10$ m(两端铰支)		
λ	$1\,000/18.4 = 54.3$	
λ/Λ	$54.3/120 = 0.45$	$54.3/102 = 0.53$
υ	$1.5 + 2\times(0.45)^2/3 = 1.64$	$1.5 + 2\times(0.53)^2/3 = 1.69$
长期容许应力 f_c	$[1 - 0.4\times(0.45)^2]\times 2.4/\upsilon$ $= 1.345 \to 1.34\ (\mathrm{t/cm^2})$	$[1 - 0.4\times(0.53)^2]\times 3.3/\upsilon$ $= 1.733 \to 1.73\ (\mathrm{t/cm^2})$

[1] 在建筑物的设计中，将荷载分为长期荷载和短期荷载来考虑，例如将自重作为长期荷载，而地震力作为短期荷载处理。同时对它们的容许应力极限值也分别有规定。

续表 4.5

长期容许荷载 f_cA	$1.34\times5.4\times10^2$ $=723.6\rightarrow720(t)$	$1.73\times5.4\times10^2$ $=934.2\rightarrow930(t)$
$l=30$ m(两端铰支)		
λ υ	$3\,000/18.4=163>\Lambda_{41},\Lambda_{50}$ 2.17	
长期容许应力 $f_c=\pi^2E/\lambda^2\upsilon$	$(3.14)^2\times2.1\times10^3/(163)^2\times2.17$ $=0.359\,5\rightarrow0.36(t/cm^2)$	
长期容许荷载 (解答)	$f_cA=0.36\times5.4\times10^2=194.4\rightarrow190(t)$	

短期容许荷载是长期容许荷载 $\times1.5$



4.7 莫尔定理与图乘法(弯矩面积法)

在上一节中已说明了,将梁的弯曲基本公式

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}\qquad(前文\ 4.12)$$

二次积分,此时出现的二个积分常数 c_1,c_2 可通过边界条件(这里是支承条件)来确定,然后可得梁在 y 方向的位移(挠度)v。可以省略上述二个操作中的(1)积分,用(2)确定积分常数,而方便地求得挠度或转角的方法便是本节的**莫尔定理**和**图乘法**。



图 4.73 "梁的基本公式什么问题都可解决,真了不起"



4.7.1 莫尔定理

在 4.3 节(6)中已叙述过,将承受垂直荷载梁的一部分切出,建立力的平衡式,有以下关系(图 4.74)

$$w_y=-\frac{dQ}{dx}\qquad(前文\ 4.10)$$

$$Q=-\frac{dM}{dx}\qquad(前文\ 4.11)$$

可将它们归纳为

$$\frac{d^2M}{dx^2}=w_y\qquad(4.31)$$

另一方面,梁的基本公式为

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}=f\qquad(前文\ 4.24)$$

式(4.31)与式(4.24)的形式相同。同时,边界条件的形式也相

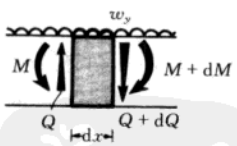


图 4.74 $d^2M/dx^2=w$ 和 $d^2v/dx^2=f(=M/EI)$ 同样都是微分方程式,用它们来求解同样的梁时,边界条件是一样的,这就是莫尔定理成立的理由

同，例如对简支梁有

对式(4.31)：$x=0$ 及 $x=l$，有 $M=0$。

对式(4.24)：$x=0$ 及 $x=l$，有 $v=0$。

为了对上述的相似点作进一步的说明，这里求解与 4.6.2 节例题 4 对应的问题。

设分布荷载为 w_y，求如图 4.75 所示荷载 $w_y=wx(l-x)/2$ 作用在简支梁上时产生的弯矩。根据式(4.31)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=-w_y(x)=wx(l-x)/2=f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}(=-Q)=\frac{w}{2}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}+c_1\right)$$

$$M=\frac{w}{2}\left(\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}+c_1x+c_2\right)$$

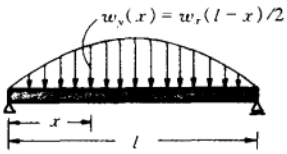


图 4.75　将 4.6.2 节例题 4 的弯矩 $M(x)$ 作为分布荷载 $w_y(x)$ 作用在简支梁上

其中的积分常数可如下求得

由 $x=0, M=0$ 得 $c_2=0$

由 $x=l, M=0$ 得 $c_1=-\dfrac{l^3}{12}$

由此在梁中央的弯矩值可求得为

$$M=-\frac{5wl^4}{384}$$

将上述计算过程与例题 4 进行比较如下

	例题 4(计算 v)	本节(计算 M)
	设 $\dfrac{M}{EI}\to f(x)$	设 $w_y\to f(x)$
	$\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=f(x)$	$\dfrac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=f(x)$
	$v=\int(\int f(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+c_1x+c_2$	$M=\int(\int f(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+c_1x+c_2$
边界条件：(1)	由 $x=0, v=0$ 得 $c_2=0$	由 $x=0, M=0$ 得 $c_2=0$
(2)	由 $x=l, v=0$ 得 $c_1=-\dfrac{l^3}{12}$	由 $x=l, M=0$ 得 $c_1=-\dfrac{l^3}{12}$

除去由于内力符号定义使 v 与 M 的符号相反外，两者的**计算过程是完全相同**的。因此，“使用与由荷载 w 求弯矩 M 同样的方法可由 M/EI 求挠度 v”是可能的。这就是利用莫尔定理轻松地求挠度 v 方法的基本原理，不过所谓轻松也只是某种程度而已。但对已熟悉了求弯矩的读者而言，却可发挥出很大的威力。

常使用莫尔定理的有：(1) 简支梁，(2) 悬臂梁这两种。

(1) 关于简支梁的莫尔定理

简支梁的莫尔定理很简洁。即：“受垂直荷载 w 作用的简支梁的**挠度** v 和**转角** $\theta(=\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)$，与由 w 产生的弯矩 M 除以 EI 且改变符号后的值 $\mu(=-M/EI)$ 作为假想荷载作用下的梁**弯矩**和**剪力**相等”。为便于理解，本章将用例题说明(例题 1,2)。

(2) 关于悬臂梁的莫尔定理

悬臂梁的莫尔定理不如简支梁那样简洁。它可表述如下：“受垂直荷载 w 作用的悬臂梁的

挠度v和转角$\theta(=\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)$,等于由$w$产生的弯矩$M$除以$EI$且改变符号后的值$\mu(=-M/EI)$作为假想荷载作用在悬臂梁的**自由端和固定端交换后的梁上**时所得的弯矩和剪力"。这里与简支梁不同的是,必须在作用假想荷载μ以前先将悬臂梁的自由端和固定端交换这一点必须引起注意[1](例题3)。图4.76为利用莫尔定理的流程图。

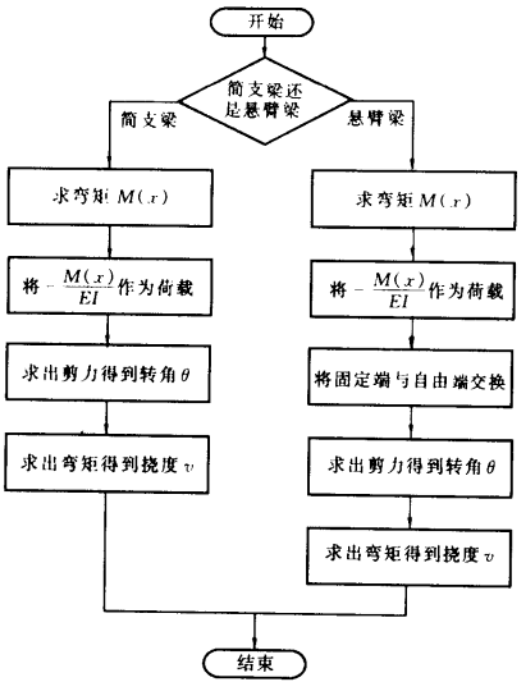


图4.76 利用莫尔定理求简支梁和悬臂梁的挠度(v)、转角(θ)的流程图

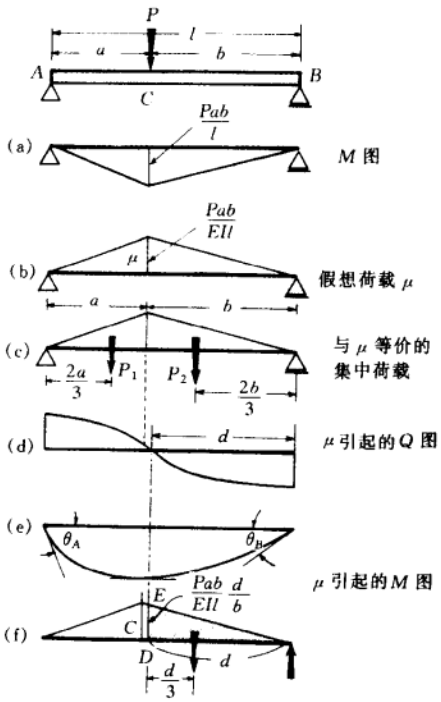


图4.77 例题1:利用莫尔定理求解受集中荷载P作用简支梁的挠度(v)和转角(θ)

[例题1(A级)] 求集中荷载P作用下简支梁的挠度和转角。

解 求得弯矩图如图4.77(a)所示(弯矩图画在梁的下侧)。然后将该弯矩图用EI除后反方向画在梁的上侧,并将它作为荷载考虑(图4.77(b))。

若只需求端部的转角θ和最大挠度v_{max},可将三角形分布的μ用等价的集中荷载P_1,P_2代替。

$$P_1=\frac{Pa^2b}{2EIl},\quad P_2=\frac{Pb^2a}{2EIl}$$

因此,A点的剪力即转角θ_A为

[1] 比较边界条件

挠度的计算	弯矩的计算
$x=0,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x=0$	$x=l,\mathrm{d}M/\mathrm{d}x(=-Q)=0$
$x=0,v=0$	$x=l,M=0$

因此为使挠度的计算与弯矩的计算一致,必须将自由端与固定端交换。

$$\theta_A(=R_A)=\frac{1}{l}\left[P_1\left(b+\frac{a}{3}\right)+P_2\left(\frac{2}{3}b\right)\right]=\frac{Pab}{6EIl^2}(a^2+3ab+2b^2)$$

$$=\frac{Pab(a+2b)}{6EIl}=\frac{Pb(l^2-b^2)}{6EIl}$$

同样，B 点的转角 θ_B 为

$$\theta_B(=-R_B)=-\frac{1}{l}\left[P_2\left(a+\frac{b}{3}\right)+P_1\left(\frac{2}{3}a\right)\right]=\frac{-Pab(2a+b)}{6EIl}=\frac{-Pa(l^2-a^2)}{6EIl} \tag{a}$$

同时，与 A 点相距 x 处点的挠度 $v(x)$ 和转角 $\theta(x)$ 如下所示。

当 $x<a$ 时

$$v(x)=R_Ax-\frac{Pabx^2}{2EIla}\cdot\frac{x}{3}=\frac{Pbx}{6EIl}[(l^2-b^2)-x^2] \tag{b}$$

$$\theta(x)=\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}=R_A-\frac{Pbx^2}{2EIl}=\frac{Pb}{6EIl}[(l^2-b^2)-3x^2] \tag{c}$$

当 $x>a$ 时

$$v(x)=R_B(l-x)-\frac{Pab(l-x)^2}{2EIlb}\cdot\frac{(l-x)}{3}=\frac{Pa(l-x)}{6EIl}[(l^2-a^2)-(l-x)^2] \tag{d}$$

$$\theta(x)=-R_B+\frac{Pa(l-x)^2}{2EIlb}=-\frac{Pa}{6EIl}[(l^2-a^2)-3(l-x)^2] \tag{e}$$

为求 v_{max}，首先检查式(c)、(e)中 $\theta(x)=0$ 时所对应的 x 值与各式的条件($x\leqslant 0$ 或 $x>0$)是否相符。若 $a>b$ 则用式(c)，否则 $a<b$ 用式(e)。这里设 $a<b$，由式(e)得

$$(l-x)^2=(l^2-a^2)/3(=d^2)$$

代入式(d)，有

$$v_{max}=\frac{Pad(l^2-a^2)}{9EIl}=\frac{Pa(l^2-a^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl} \tag{f}$$

在熟练后可不用式(b)、(c)，而直接求 v_{max} 即可。

设 $b>a$，图 4.77(d)中 $Q=0(\theta=0)$ 的点比 C 点更靠 B 的一侧。设该点与 B 点相距 d(参照图 4.77(f))，$DE=(Pab/EIl)\cdot(d/b)$。根据 $\Delta BDE=R_B$，有

$$\frac{Pabd^2}{2EIlb}=R_B=\frac{Pab(2a+b)}{2EIl}$$

所以

$$d=\sqrt{(2a+b)b/3}=\sqrt{(l^2-a^2)/3}$$

由此，参照图 4.77(f)可得 v_{max} 为

$$v_{max}=R_Bd-\frac{Pabd^2}{2EIlb}\cdot\frac{d}{3}=\frac{Pabd}{6EIl}\left[(2a+b)-\frac{d^2}{b}\right]$$

$$=\frac{Pa[(2a+b)b]^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl}=\frac{Pa(l^2-a^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl} \quad (\text{前文 f})$$

若 $a=b$(荷载 P 作用在梁中央)，将 $a=l/2$ 代入式(f)可得

$$v_{max}\left(a=\frac{l}{2}\right)=\frac{Pl^3}{48EI} \tag{g}$$

[例题 2(A 级)] 计算两端 A、B 分别作用有外力矩 M_A、M_B 的简支梁两端的转角 α_{AB}、α_{BA}(本例题并非难题，但所得的结果为转角法的基本公式，故十分重要。图 4.78(a))。

解 首先对仅作用 M_A 的情况求解(图 4.78(b))。

弯矩图如图 4.78(c)所示，利用莫尔定理将图 4.78(d)作为荷载计算点 A 的剪力，它等于 A 点的反力。

$$R_{A1}=\frac{M_Al}{2EI}\cdot\frac{2}{3}=\frac{M_Al}{3EI}=\theta_{A1}$$

B 点的剪力为

$$-R_{B1}=-\frac{M_A l}{2EI}\cdot\frac{1}{3}=\frac{-M_A l}{6EI}=\theta_{B1}$$

(图 4.78(e))

然后对 B 点作用力矩 M_B 的情况进行同样的求解(图 4.78(f)～(g)),可得

$$\theta_{A2}=-R_{A2}=-\frac{M_B l}{6EI}$$

$$\theta_{B2}=R_{B2}=\frac{M_B l}{3EI}$$

因此,在 M_A、M_B 同时作用时,有

$$\alpha_{AB}=\theta_{A1}+\theta_{A2}=\frac{M_A l}{3EI}-\frac{M_B l}{6EI}$$

$$\alpha_{BA}=\theta_{B1}+\theta_{B2}=\frac{-M_A l}{6EI}+\frac{M_B l}{3EI}$$

将上式写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix}\alpha_{AB}\\ \alpha_{BA}\end{bmatrix}=\frac{1}{6EK}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{AB}\\ M_{BA}\end{bmatrix}\qquad(4.32)$$

式中,$K=I/l$(称 K 为**刚度**),$M_A=M_{AB}$,$M_B=M_{BA}$。

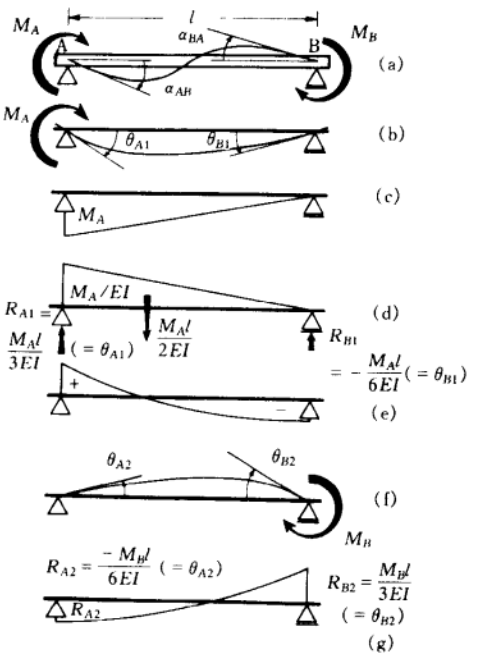


图 4.78 例题 2:计算两端 A、B 分别作用有外力矩 M_A、M_B 简支梁两端的转角 α_{AB}、α_{BA}。求解本例可得重要的转角法基本公式

[例题 3(A 级)] 求自由端作用集中荷载 P 的悬臂梁在自由端的挠度和转角(本例题与前节例题 2 为同一问题)。

解 悬臂梁的弯矩图如图 4.79(b) 所示。

与简支梁不同的是弯矩图画在梁的上侧。

① 将弯矩图用 EI 除后并改变符号的 μ 作为荷载,A 端值为 Pl/EI 的三角形分布荷载。

② 将自由端和固定端交换(图 4.79(c))。

③ 只要求得 B 端的剪力和弯矩即可求出 θ_B、v_B,故将三角形荷载换算成等价的集中荷载

$$F=\frac{Pl}{EI}\cdot\frac{l}{2}$$

① B 端的剪力为(即转角 θ_B)

$$\theta_B=\frac{Pl^2}{2EI}\qquad(a)$$

⑤ B 端的弯矩为(即挠度 v_B)

$$v_B=\frac{Pl^2}{2EI}\times\frac{2l}{3}=\frac{Pl^3}{3EI}\qquad(b)$$

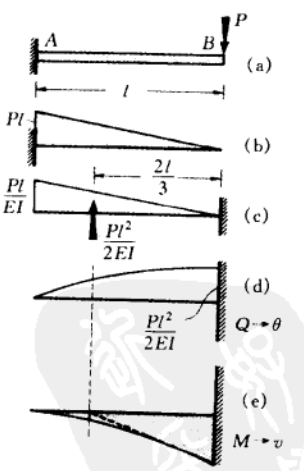


图 4.79 例题 3:利用莫尔定理求解端部作用集中荷载 P 的悬臂梁的挠度和转角

4.7.2 图乘法(弯矩面积法)

一般如学习了莫尔定理便可省略图乘法,两者只要理解其中之一便可。

莫尔定理是利用 $3w\to M$(荷载→弯矩)的计算过程(即积

分过程）与 $M\to v$（弯矩 → 挠度）的计算过程类似的特点；而图乘法则是利用求“面积”的过程或求面积与距离之积的**面积矩**过程分别与由弯矩求 θ 或由弯矩求 v 的过程类似的特点。

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\left(=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{M}{EI} \tag{4.33}$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{M}{EI},\quad \mathrm{d}\theta=\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \tag{4.34}$$

将式(4.34)积分可得

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}\theta=\int_{x_1}^{x_2}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x,\quad \theta_{x_2}-\theta_{x_1}=\theta_2-\theta_1=\int_{x_1}^{x_2}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \tag{4.35}$$

式(4.35)表示，$x=x_1$ 与 $x=x_2$ 之间转角之差与将 $M/EI(=f)$ 画成图时介于 $x_1\sim x_2$ 之间的面积相等。将之称为第一定理(图 4.80(a),(b))。因此，当 $M/EI(=f)$ 已知时，若已知 θ_1 则可通过计算 M/EI 图中 $x_1\sim x_2$ 之间的面积求得 θ_2。

那么，当 $x=x_1$ 处的挠度 v_1 已知时怎样去求 $x=x_2$ 处的挠度 v_2。

对式(4.34)的两边乘以 x，可得下式

$$x\mathrm{d}\theta=\frac{M}{EI}x\,\mathrm{d}x \tag{4.36}$$

对式(4.36)进行积分

$$\int_{x_1}^{x_2}x\mathrm{d}\theta=\int_{x_1}^{x_2}\frac{M}{EI}x\,\mathrm{d}x \tag{4.37}$$

式(4.37)的左边为：在 $x=x_1$ 处对挠度曲线 $v(=v(x))$ 所引的切线(图 4.80(c))AA' 和在 $x=x_2$ 所引的切线 BB' 在 $x=0$ 处的 v 轴上所截取的线段 $A'B'$ 的长度 $t_{A'B'}$，但上述情况仅当挠度 v 和转角 θ 均很小时才成立。将 $t_{A'B'}$ 称为切线距离(图 4.80(d) 为图 4.80(c) 部分的放大)。

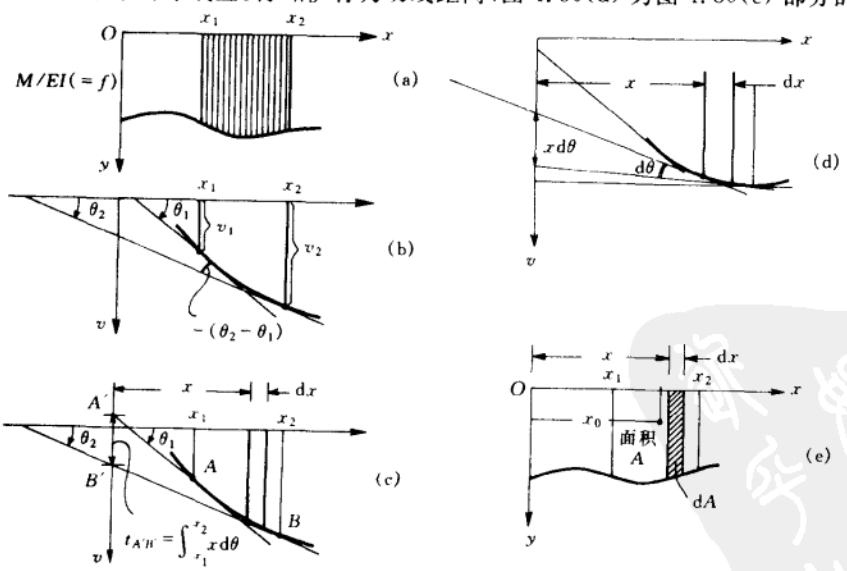


图 4.80　图乘法的原理：

转角 θ 由 M/EI 图的面积求得　挠度 v 由 M/EI 图的面积矩求得

另一方面,从图 4.80(e)可清楚地看出式(4.37)的右边为 M/EI 与 dx 所围成的小面积 dA 乘以距离(臂长)x 并叠加后是一次矩(面积矩),若用 $A(=\int_{x_1}^{x_2}(M/EI)dx)$ 除后可得 $x_1 \sim x_2$ 之间面积的形心位置 x_0。反之,若形心位置 x_0 已知则 Ax_0 为右边的积分值。这样,通过求 M/EI 图上的面积矩,便可计算式(4.37)左边的切线距离 $A'B'$。将此称为第二定理。根据该切线距离求挠度 v 的步骤根据具体问题的不同略有差异,将在例题 4,5 中解释。

将上述的图乘法归纳一下可得:

(1) 转角 θ 可由 M/EI 图的面积求得(式(4.35)—— 第一定理)

(2) 挠度 v 可由 M/EI 图的面积矩求得(式(4.37)—— 第二定理)

[例题 4(A 级)] 求在杆中间部分作用集中荷载 P 时悬臂梁端部的挠度和转角。

解 在图 4.81 中由于 CB 之间没有外力作用故转角不变,为 $\theta_B = \theta_C$。根据固定条件,固定 A 端的转角 $\theta_A = 0$。因此,切线距离 $t_{A'B'}$ 在图中为 $t_{AB'}$。

根据式(4.35)(第一定理),有

$$\theta_B = \theta_C = \frac{Pa}{EI} \cdot \frac{a}{2} = \frac{Pa^2}{2EI} \qquad \text{(a)}$$

根据式(4.37)(第二定理),有

$$t_{AB'} = \frac{Pa^2}{2EI} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa^3}{6EI}$$

由图 4.81(a),有

$$v_B = l \cdot \theta_B - t_{AB'} = \frac{Pa^2 l}{2EI} - \frac{Pa^3}{6EI} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l - a) \qquad \text{(b)}$$

这样,在图乘法中有必要画出挠度曲线(图 4.81(a)),如果在自由端作用集中荷载 P,则将 $a = l$ 代入式(b),有

$$v_B = \frac{Pl^3}{3EI}$$

其结果与例题 3 一致。

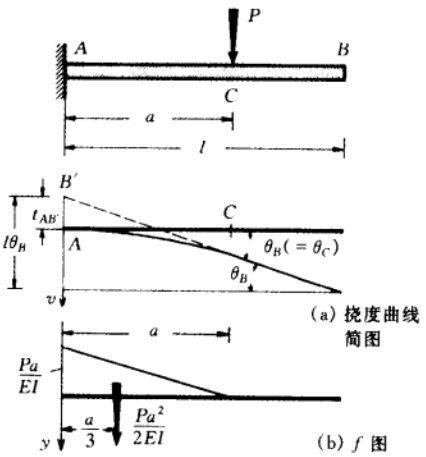


图 4.81 例题 4:用图乘法求在杆中间受集中荷载作用下悬臂梁端部的挠度和转角(本题为最合适于用图乘法求解的例题)

[例题 5(B 级)] 求在集中荷载作用下简支梁的最大挠度(图 4.82(a))。

解 通过例题 4 可见图乘法对悬臂梁十分简便。对简支梁由于开始时不知道 $\theta = 0$ 的点(D 点),故问题不像悬臂梁那样简单。

首先画出图 4.82(b) 的 f 和挠度曲线($v(x)$)的简图 4.82(c)。设 DB 的距离为 d。根据第二定理有

$$t_{AB} = (-\theta_B)l = (\text{面积 } \Delta AMB) \times \text{形心距离}$$

$$= \left(\frac{Pab}{EIl} \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{a+l}{3} = \frac{Pab(a+l)}{6EI}$$

根据第一定理有

$$-\theta_B = \text{面积 } \Delta BDN = \frac{Pab}{EIl} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{d}{2} = \frac{Pad^2}{2EIl}$$

由以上两式,有

$$\frac{Pab(l+a)}{6EIl} = \frac{Pad^2}{2EIl}$$

所以

$$d^2 = \frac{b(l+a)}{3} = \frac{l^2-a^2}{3}$$

由此可得

$$-\theta_B = \frac{Pa(l^2-a^2)}{6EIl}$$

根据图 4.82(c) 可得以下结果

$$v_D = \overline{DB''} - t_{D'B''} = (-\theta_B)d - (\text{面积 } \Delta BDN) \times \text{形心距离}$$

$$= (\text{面积 } \Delta BDN)\left(d - \frac{d}{3}\right) = \frac{Pad^2}{2EIl} \cdot \frac{2}{3}d = \frac{Pad^3}{3EIl}$$

$$= \frac{Pa}{3EIl}\left(\frac{l^2-a^2}{3}\right)^{3/2} = \frac{Pa(l^2-a^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl} \qquad (a)$$

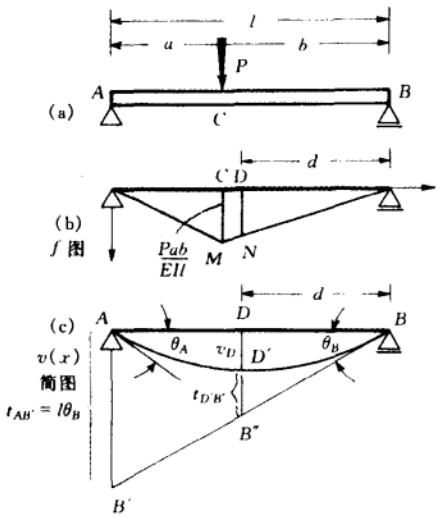


图 4.82　例题 5：求集中荷载作用下简支梁 v,θ 的问题，与例题 1 类似但这里用图乘法求解

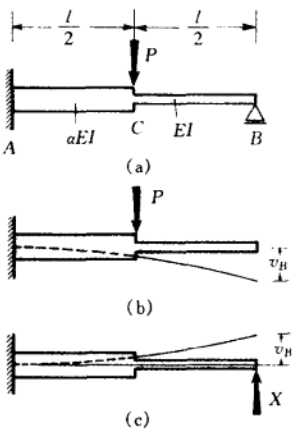


图 4.83　例题 6：求一次超静定非等截面（变截面）梁的内力

[例题 6(B 级)]　求图 4.83 梁的内力。

解　本例题是应用题。关键有两点：(1) 梁的 EI 在中间发生变化。(2) 这是“超静定梁”(未知数有 4 个，超过了力的三个平衡式)。

对(1)，只要分阶段给出 f 图即可，问题不大。

对(2)，将问题简化为静定问题求解。即将 B 点的可动铰支座去掉求出 B 点的挠度 v_B，然后在 B 点反方向加上力 X 使产生位移 v_B，则该 X 便是作用在可动铰支座 B 点的反力。这样，问题便归结为将 B 点的支座去掉求出 B 点的挠度 v_B(图 4.83(b),(c))。

利用例题 4 的结果(式(b))，有

$$v_B = \frac{P(l/2)^2}{6aEI}\left(3l - \frac{l}{2}\right) = \frac{5Pl^3}{48aEI} \qquad (a)$$

另一方面，在自由端作用力 X 时的转角或挠度(参照图 4.84(b),(c)) 为

$$\theta_B = \frac{Xl}{aEI} \cdot \frac{l}{2} + \left(\frac{Xl}{2EI} - \frac{Xl}{2aEI}\right) \cdot \frac{l}{4} = \frac{Xl^2}{2EI}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\alpha}\right) = \frac{Xl^2}{8EI}\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right)$$

$$t_{AB'}=\frac{Xl}{aEI}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3}+\left(\frac{Xl}{2EI}-\frac{Xl}{2aEI}\right)\cdot\frac{l}{4}\cdot\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{6}\right)=\frac{Xl^3}{2EI}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6a}\right)=\frac{Xl^3}{12EI}\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$$v_B=\theta_B-t_{AB'}=\frac{Xl^3}{24EI}\left(3+\frac{9}{a}-2-\frac{2}{a}\right)=\frac{Xl^3}{24EI}\left(1+\frac{7}{a}\right)\qquad\text{(b)}$$

根据式(a)、(b)，有

$$X=\frac{5P}{2a+14}\qquad\text{(c)}$$

由此，可得剪力图，弯矩图如图 4.84(d)、(e) 所示。

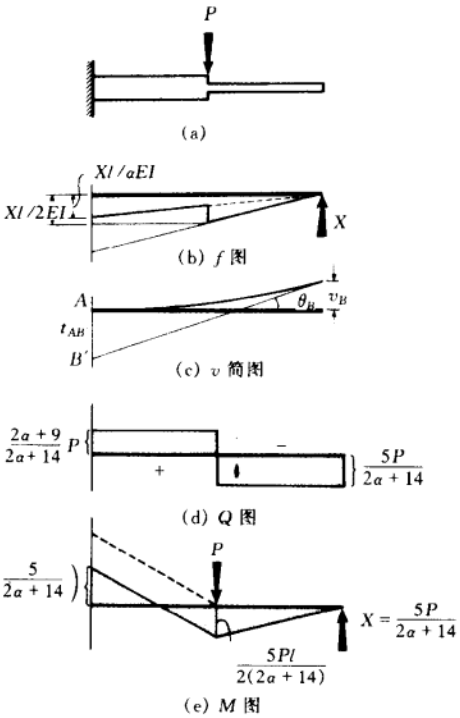


图 4.84　例题 6：图乘法的顺序



第 4 章的总结：

静定桁架为用铰连接多个直杆形成的结构，可作为杆中仅产生轴力的问题来求解（当杆中作用荷载时，则会产生弯矩）。

静定梁，静定刚架的内力多数情况下可用图解法（边画出内力图）求得。此时只要遵循 4.5 节的规则，则画内力图时不会出错。

推导了梁的基本公式 $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M}{EI}$，这是结构力学中重要的基本公式。

此外，莫尔定理及图乘法对梁变形计算的简化是有效的。



第 4 章练习题

[桁架]

4.1　表示出图 4.85 所示桁架反力的方向和杆件内力是拉力还是压力。(A 级)

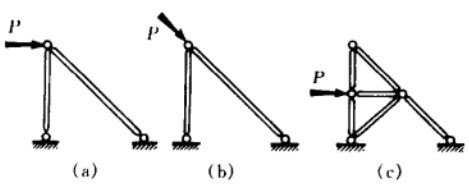


图 4.85

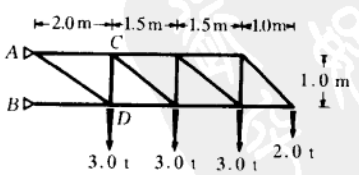


图 4.86

4.2　求图 4.86 所示桁架的 AC、AD、BD 杆件的内力。设压力为正，拉力为负。(A 级)

4.3　图 4.87 所示桁架中，杆件 DE、EF 的内力是多少。(A 级)

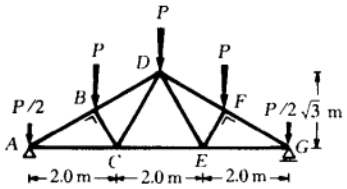


图 4.87

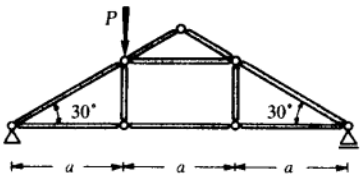


图 4.88

4.4 图 4.88 所示桁架是否静定?若不静定,在节点间插入新的杆件使之成为静定的桁架。设材料容许应力中的拉应力为压应力的 1.2 倍。表示出图示荷载状态下最经济的静定化方法。(B 级)[悬臂梁]

4.5 画出图 4.89 所示各种悬臂梁的内力图(N,Q,M 图)。(A 级)

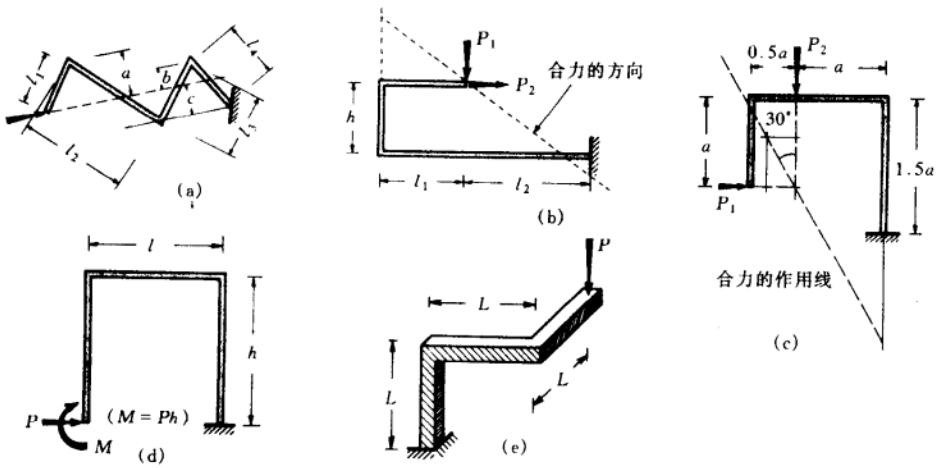


图 4.89

4.6 图 4.90 表示 4 层建筑物所受的水平地震力。求地震力的合力大小、位置及它们产生的倾覆力矩(作用在各层的水平力对地面形成的转动力矩的总和)。(A 级)

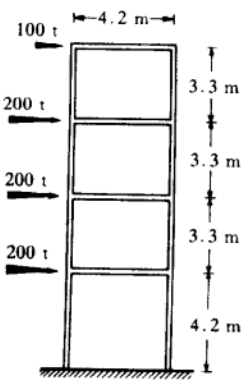


图 4.90

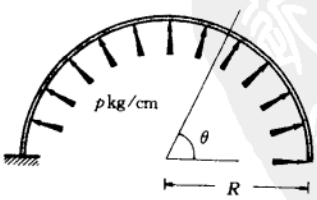


图 4.91

4.7 加工成半圆形的常截面杆件,一端固定并受图 4.91 所示的沿半径方向的单位长度为 pkg 的内压作

用。求此时 θ 截面内的 N,Q,M 表达式并画出内力图。(B级)[简支梁]

4.8 画出图 4.92 所示各种简支梁的内力图(N,Q,M 图)。(A级)

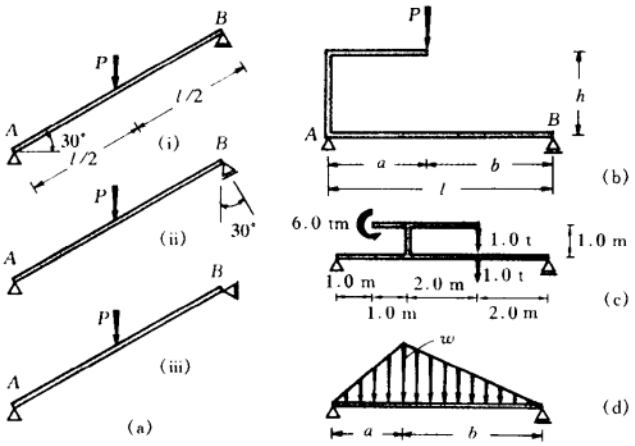


图 4.92

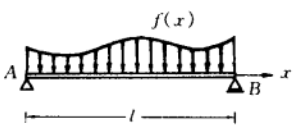


图 4.93

4.9 设分布荷载为 x 的函数 $w=f(x)$,推导出反力和内力的公式(图 4.93)。(A级)

4.10 画出图 4.94 所示简支刚架的内力图(N,Q,M 图)。(A级)[包含有铰的静定结构]

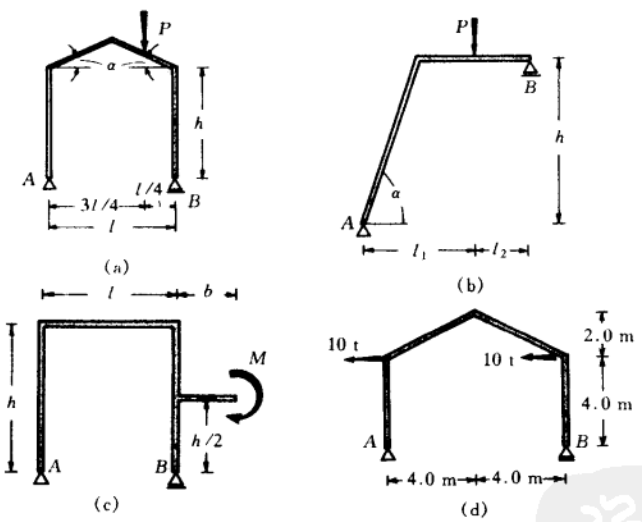


图 4.94

4.11 画出图 4.95 所示静定结构的内力图(N,Q,M 图)。(A,B级)[应力的概念]

4.12 如图 4.96 所示拉力 P 均匀地作用在均质材料上,求任意角度截面上的垂直和剪切应力(且在图上表示)。设材料宽度为 b,厚度为 h。(A级)[截面的二次矩]

4.13 具有图 4.97 所示截面的简支梁上作用有荷载。按各截面产生的最大弯曲应力的大小表示出其顺序。(A级)

4.14 求图 4.98 所示 L 形截面关于 x,y 轴的截面一次矩和形心 G 的位置。并求其关于通过形心的 X,Y 轴的截面二次矩。(A级)

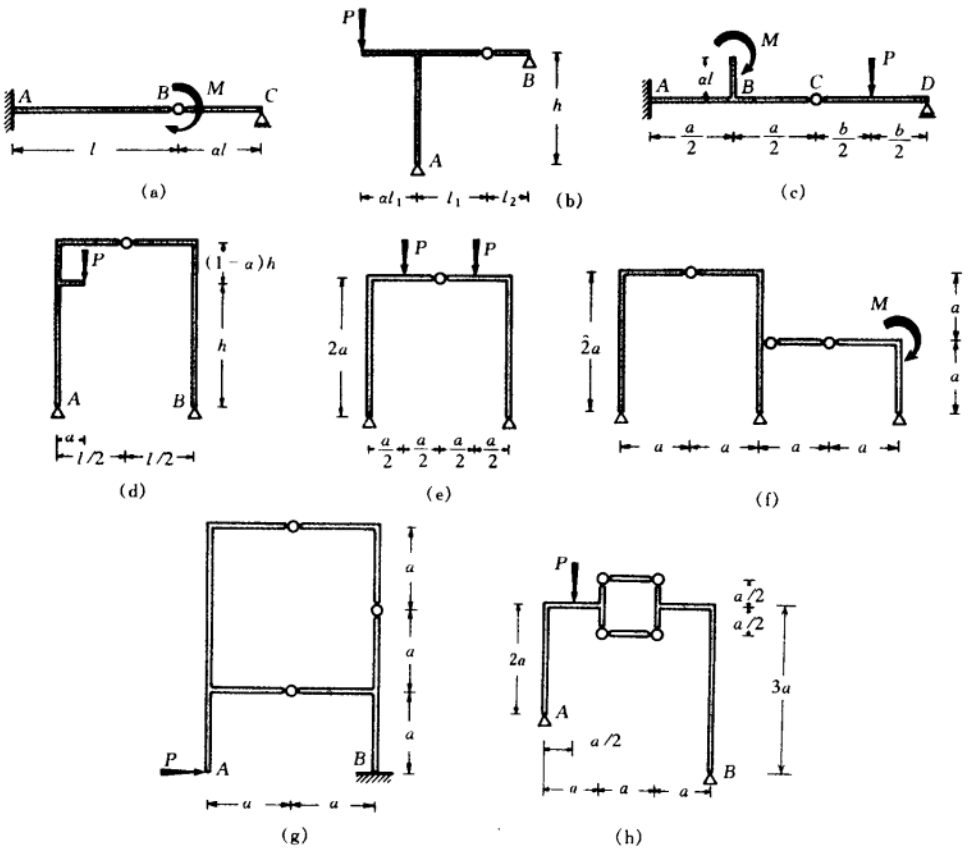


图 4.95

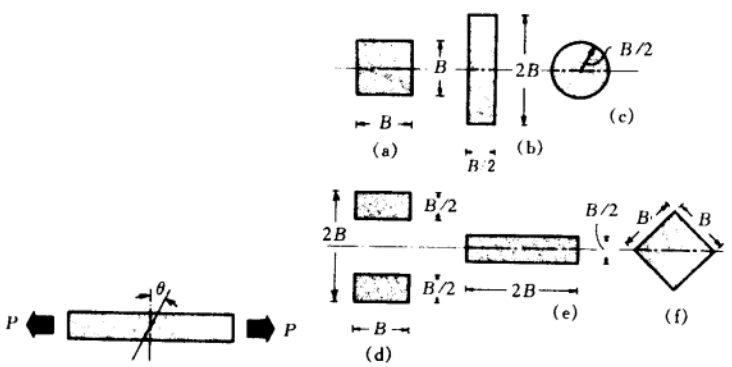


图 4.96

图 4.97

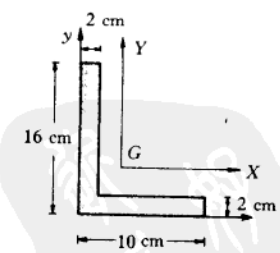


图 4.98

4.15 就图 4.99 所示梁，回答以下问题。设变形是微小的且忽略剪切变形。(C 级)

(1) 求中性轴的位置。

(2) 求 A 点截面内的应力分布。

(3) 推导出挠度的弹性曲线公式并求 B 点的挠度。

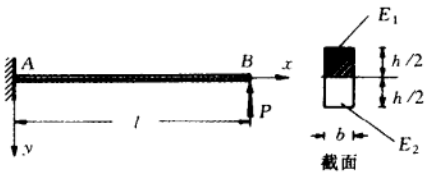
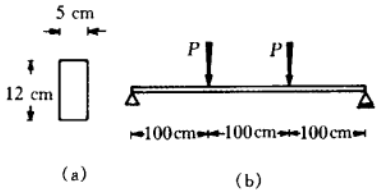


图 4.99



4.16 图 4.100(a) 所示长方形截面的简支梁受图(b) 所示荷载的作用。设材料的 SS 曲线(应力-应变曲线) 为图(c) 所示时，回答以下问题：(假定截面保持平面和形状不变)(C 级)

(1) 求最大边缘应力为 2.0×10^3 kg/cm² 时的 P 值(σ_f)。

(2) 在 $\sigma_f > 2.0\times10^3$ kg/cm² 的条件下求 P 与中性轴 y_n 的关系(图(d))。

(3) 将该关系用图表示出来。

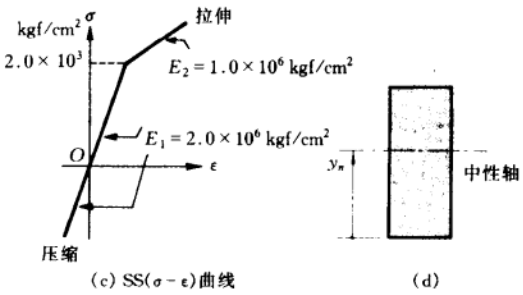


图 4.100

4.17 用图表示图 4.101 中的 P 与 M_A(A 点的弯矩) 的关系。设 $L = 1.0\times10^2$ cm，$EI = 1.0\times10^6$ kg/cm²，$v_0 = 0.2$ cm。(B 级)

4.18 求解图 4.102 所示的框架并画出 M、Q 图。且求 B、C 点的挠度。(B 级)

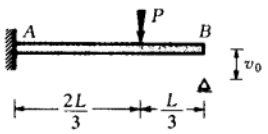


图 4.101

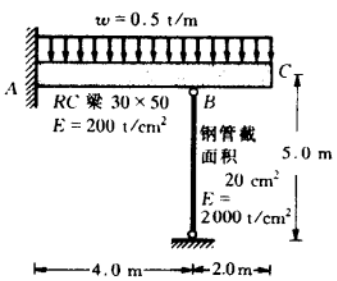


图 4.102

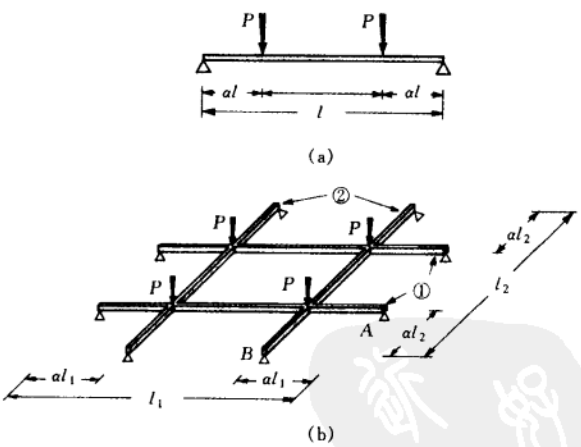


图 4.103

4.19

(1) 求图 4.103(a) 所示梁在荷载作用点处的挠度。设梁的弯曲刚度为 EI。(A 级)

(2) 求图(b) 所示井字梁支点 A、B 点的反力。设杆件 ①，杆件 ② 的弯曲刚度分别为 EI_1，EI_2，忽略抗扭刚度。(B 级)

5 梁基本公式的应用

第5章的内容：在本章中利用“梁的基本公式：$d^2v/dx^2 = M/EI$”推导出3种解法（它们之间有密切的关系）：

（1）转角法　（基本解法）；

（2）刚臂法　（为手算而开发的）；

（3）矩阵法　（适合于计算机）。

并用这些解法求解超静定结构，求得杆件的**内力及其分布**。这些解法的基本要点为：

（1）复杂杆系结构是由直杆等**简单构件**所构成。

（2）这些杆件的力学性能可用杆端作用的外力矩与由此产生杆端转角的关系，即杆端的**外力与位移**的关系来表示。

（3）利用杆件之间连接点（节点）处力（力矩）的平衡及连接条件在变形前后不变的性质，用各**分散（离散）**节点处的外力与位移关系来表示结构总体的力学关系。

这样的求解方法也可以说就是有限元方法。此外前面已说过，过去大专和大学“结构力学”的教学中，几乎所有的学习时间都放在第4章、第5章。因此，本章是十分重要的一章。通过本章的学习，连续结构的求解可用离散节点的求解来代替。

在上一章中已表明，可通过对梁的基本公式 $d^2v/dx^2 = M/EI$ 积分并根据支承条件确定积分常数，可求得转角（$\theta = dv/dx$）和挠度（v），进一步利用 θ，v 便可求解超静定结构。但是，谁都会想到：“有没有不要积分而通过修改基本公式便可求解超静定结构的方法”。众所周知，利用莫尔定理或图乘法可以减少积分的麻烦并节省时间。但人们希望有更简便的方法，同时还可求解更复杂的结构。能满足这样的愿望就是**转角法**。

转角法是对梁基本公式的发展和修改，它的形式十分简便。除荷载项外（后文叙述）不要积分，且荷载项可就几种情况预先计算好，以后便可省略每一次的积分。此外，对复杂结构也可认为是由简单直杆连接而成，并可对其进行求解。只是需求解多元线性方程：$[A]\{x\} = \{b\}$[1]，

[1] 目前只要对矩阵的表示方法、特别对矩阵之间的积有所理解即可。在附录中叙述了矩阵运算的要点。

在没有计算机的过去这是一件十分费力的事。为了克服这个缺点，提出了**刚臂法**[①]，方法十分巧妙，可容易地在结构图上用渐近法求解多元线性方程。当用手算求解未知数大于 4 个的结构时应选用刚臂法。而将如此优秀的刚臂法从实际计算中淘汰的则是计算机。

对计算机而言，未知数哪怕是成千上万也并非是难事。计算机的方法又回到了转角法，指的是它在理论上回到了最简单的转角法，只是将公式变换为稍复杂的矩阵而已（对考虑变形桁架解法参照 4.2 节例题 3）。矩阵解法不仅可用于直杆结构还可用于求解平面、曲面和空间等各种结构。只是它不适于手算而是专门适用于计算机的计算。



5.1 转角法



5.1.1 基本公式的推导

将 4.7 节[例题 2]的结果重新写为

$$\begin{bmatrix}\alpha_{AB}\\ \alpha_{BA}\end{bmatrix}=\frac{1}{6EK}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{AB}\\ M_{BA}\end{bmatrix} \qquad (\text{前文 } 4.32)$$

求解该式的弯矩，可写成

$$\begin{bmatrix}M_{AB}\\ M_{BA}\end{bmatrix}=2EK\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{AB}\\ \alpha_{BA}\end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

这里请读者把该式理解为：作用在简支梁杆端的外力矩与杆端转角（此时也就是转角）的关系（图 5.1 及 5.2(a)）。将作用在杆端的外力矩称为**杆端力矩**。

将简支梁的支座上下移动并不产生弯矩，但产生杆件转角 R（图 5.2(b)）。因此当支座发生移动且作用有外力矩时，杆端的转角 β 应为杆件转角 R 与由杆端力矩产生的转角 α 之和（图 5.2(b)）。转角是以完全无转动的初始状态为基准的。即

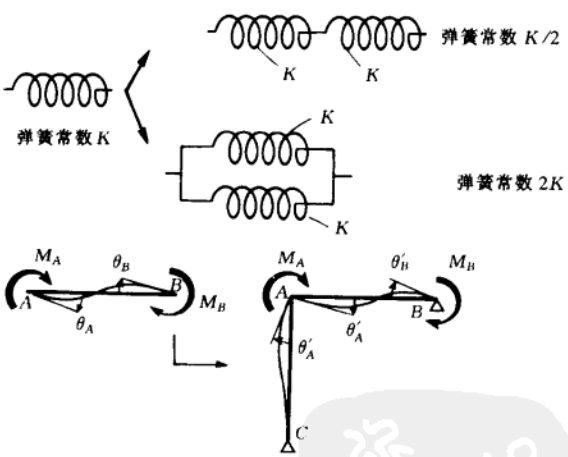


图 5.1 当已知各弹簧的“外力与变形的关系”，则合成弹簧的性质也可知道。当已知各杆件的“外力与变形（杆端力矩与转角）”的关系，则由各杆件组合成刚架的性质也可知道

① 刚臂法又称刚臂力矩法，哈定·克罗斯（Hardy，Cross）法等。而二循环法（two cycle）和卡尼（Kani）法则是改良后的刚臂法。

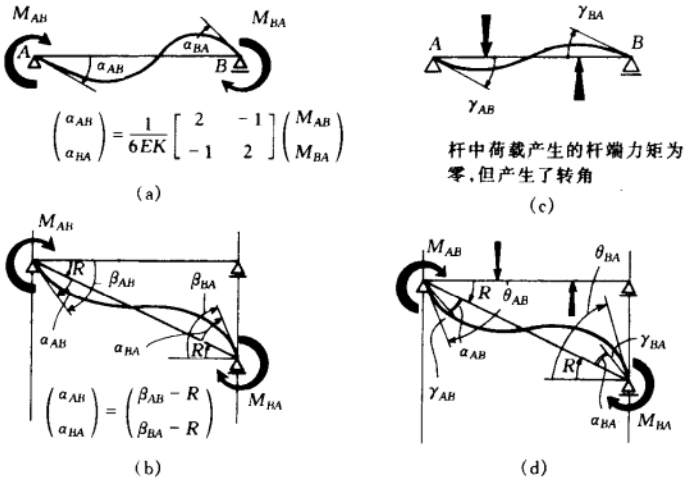


图 5.2 转角法基本公式的推导

$$\begin{bmatrix}\beta_{AB}\\ \beta_{BA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{AB}+R\\ \alpha_{BA}+R\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

由于式(5.1)是表示杆端力矩 M 与由此产生转角 α 的关系，求式(5.2)中的 α，可得

$$\begin{bmatrix}\alpha_{AB}\\ \alpha_{BA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{AB}-R\\ \beta_{BA}-R\end{bmatrix} \tag{5.3}$$

代入式(5.1)可得

$$\begin{bmatrix}M_{AB}\\ M_{BA}\end{bmatrix}=2EK\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{AB}-R\\ \beta_{BA}-R\end{bmatrix} \tag{5.4}$$

当有杆中荷载作用时，由此在杆端产生转角 γ。当然，即使有荷载作用在简支梁上其杆端的弯矩也为零(图 5.2(c))。杆端的转角 θ，应为荷载引起的转角 γ、支座引起杆件的转角 R 与由杆端力矩产生的转角 α 之和(图 5.2(d))。

$$\begin{bmatrix}\theta_{AB}\\ \theta_{BA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{AB}+R+\gamma_{AB}\\ \alpha_{BA}+R+\gamma_{BA}\end{bmatrix} \tag{5.5}$$

对 α 求解可改写为

$$\begin{bmatrix}\alpha_{AB}\\ \alpha_{BA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_{AB}-R-\gamma_{AB}\\ \theta_{BA}-R-\gamma_{BA}\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

代入式(5.1)有

$$\begin{bmatrix}M_{AB}\\ M_{BA}\end{bmatrix}=2EK\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{AB}-R-\gamma_{AB}\\ \theta_{BA}-R-\gamma_{BA}\end{bmatrix} \tag{5.7}$$

实际上这就是转角法的基本公式，将杆端力矩与转角的关系用弯矩的量纲来表示。当用矩阵的形式来表达时，既容易理解也便于记忆。

反之，对转角求解的形式表达为下式，此时公式变为角度的量纲、即无量纲的公式(角度弧度为[长度]/[长度]，故无量纲)。

$$\begin{bmatrix}\theta_{AB}-R-\gamma_{AB}\\ \theta_{BA}-R-\gamma_{BA}\end{bmatrix}=\frac{1}{6EK}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{AB}\\ M_{BA}\end{bmatrix}$$

将转角法的基本公式(式(5.7))的右边分解后有

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{AB} - R \\ \theta_{BA} - R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{AB} \\ C_{BA} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

式中 C_{AB},C_{BA} 为

$$\begin{bmatrix} C_{AB} \\ C_{BA} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_{AB} \\ -\gamma_{BA} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

将 C_{AB},C_{BA} 移项后有

$$\begin{bmatrix} M_{AB} - C_{AB} \\ M_{BA} - C_{BA} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{AB} - R \\ \theta_{BA} - R \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

称 C_{AB},C_{BA} 为**荷载项**,当杆中无荷载作用时荷载项为零。从式(5.10)可清楚地看出,荷载项具有弯矩的量纲,它的值与杆件的刚度 $K(=I/l)$ 和材料特性 E 没有直接的关系[①]。同时,该荷载项等于两端固定时的固端弯矩,这可证明如下:将固定端的条件 $R=0$,$\theta_{AB}=\theta_{BA}=0$(无移动,无转动)代入式(5.10)中,有

$$\begin{bmatrix} M_{AB} - C_{AB} \\ M_{BA} - C_{BA} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

可得,$M_{AB}=C_{AB}$,$M_{BA}=C_{BA}$(图 5.3)。

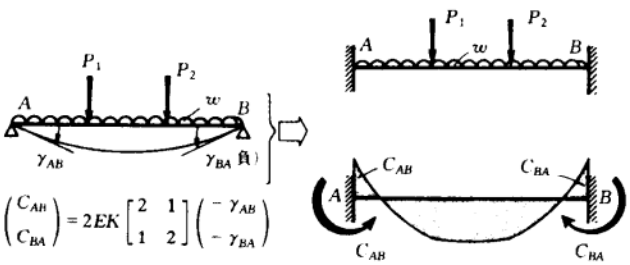


图 5.3 当杆中有荷载作用时,需计算荷载项 C_{AB},C_{BA}。该荷载项与两端固定梁在同样的荷载作用下的杆端力矩 M_{AB},M_{BA} 完全相等



5.1.2 荷载项的计算

在利用转角法求解问题前,先试用[例题]计算荷载项。当然,使用的公式为式(5.9),其中的 γ 可用莫尔定理简单地求得。即对简支梁受荷载作用时产生的弯矩除以 EI 并改变符号,将之作为荷载考虑,然后求出支点 A,B 的剪力(参照 4.7 节)。

[例题 1(B 级)] 当给定荷载 $w(x)$ 时,用流程图表示求 C_{AB},C_{BA} 的顺序。并求等间隔的 n 个相等集中荷载作

① 很明显,这是由于在求 γ 时用到了 M/EI,而在从 γ 求 C 时又乘了 $2EI/l$,致使 EI 抵消(参照例题 1)。当然,当杆件的 E,K 不是常数而是变化时,EK 将对荷载项有影响,但其影响不是以 EK 的绝对值而是以其分布形式给出的。

用下的 C_{AB}，C_{BA}（图 5.4）。

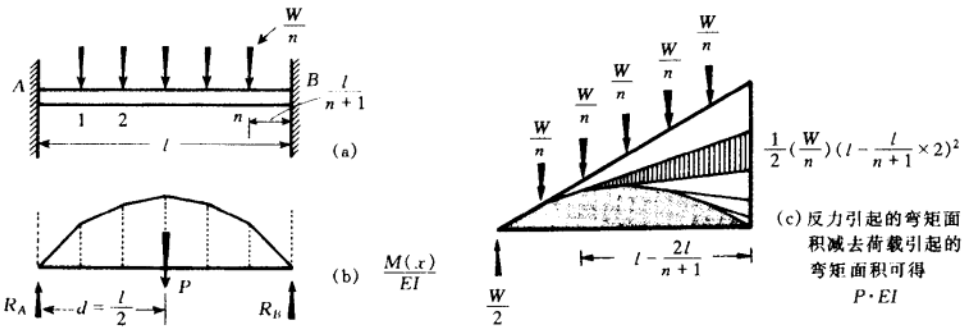


图 5.4　例题 1：n 个相等的集中荷载 W/n 等间隔地作用在梁上时，荷载项 C_{AB}，C_{BA} 的求法（表 5.1）

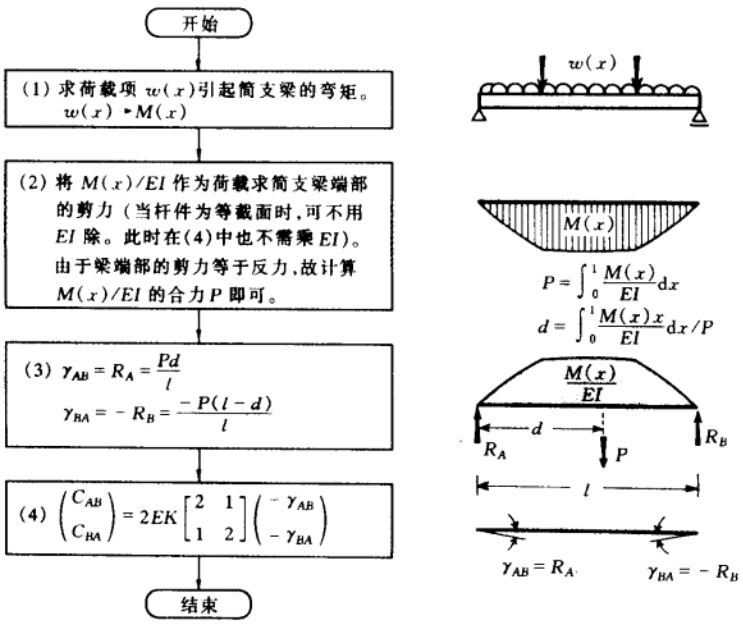


图 5.5　表示求荷载项 C_{AB}，C_{BA} 顺序的流程图

解　流程图如图 5.5 所示。设合力为 W。各集中荷载的大小为 W/n，合力的作用点在梁的中央（$d = l/2$），反力的大小为 $W/2$。$M(x)/EI$ 的合力 P 如图 5.4(c) 所示可表达为下式。

$$P = \frac{1}{2EI}\left[\frac{W}{2}l^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{W}{n}\left(l - \frac{l}{n+1}i\right)^2\right]$$

$$= \frac{Wl^2}{2EI}\left\{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{2i}{n+1} + \frac{i^2}{(n+1)^2}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$= \frac{Wl^2}{2EI}\left\{\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{2n(n+1)}{2n(n+1)} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)^2}\right)\right\}$$

所以

$$P = \frac{Wl^2}{2EI}\left\{\frac{1}{2} - \frac{2n+1}{6(n+1)}\right\} \tag{a}$$

由于 $d = l/2$（对称荷载即对称弯矩），有

$$\gamma_{AB} = R_A = \frac{P(l-d)}{l} = \frac{Wl}{4EK}\left(\frac{1}{2} - \frac{2n+1}{6(n+1)}\right) = -\gamma_{BA}$$

所以

$$C_{AB} = 2EK(-2\gamma_{AB} - \gamma_{BA}) = -2EK\gamma_{AB}$$

$$C_{AB} = -\frac{Wl}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2n+1}{6(n+1)}\right) = -C_{BA} \tag{b}$$

因此，当 $n = 1$（即仅有中央的集中荷载 W）时由式(a)有

$$C_{AB} = -C_{BA} = -\frac{Wl}{8} \tag{5.12}$$

当 $n = \infty$（即均匀分布荷载，$w = W/l$）时有

$$C_{AB} = -C_{BA} = -\frac{Wl}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2 + (1/n)}{6 + (6/n)}\right) \to -\frac{Wl}{12} = -\frac{wl^2}{12} \tag{5.13}$$



5.1.3 转角法的应用

(1) 超静定梁

回到转角法的基本公式，首先来求解一个简单的问题(图 5.6)。问题为求一端(A 点)固定一端可动铰支(B 点)的梁在中央受集中荷载 F 作用的内力。

当不使用转角法时，该问题如 4.6 节的例题 3 那样按以下顺序求解。

① 将梁端部(B 点)的可动铰支座撤去，梁变为悬臂梁(静定结构)。

② 求该悬臂梁 B 点的挠度(4.7 节例题 4)

$$v_B = \frac{Fa^2}{6EI}(3l - a)$$

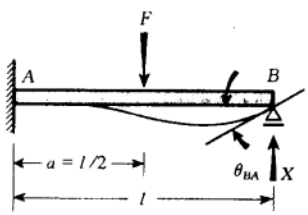


图 5.6 用转角法求解简单的超静定梁

③ 在 B 点作用向上的力 X。此时由 X 产生 B 点的挠度为(方向向上)

$$v'_B = \frac{Xl^3}{3EI}$$

④ 令 $v_B = v'_B$，使 B 点满足可动铰支座沿 y 方向无位移的条件。由此，有

$X = Fa^2(3l - a)/2l^3$，若 $a = l/2$ 则 $X = 5F/16 = R_B$

⑤ 求悬臂梁在中央集中荷载 F，自由端 B 点集中荷载 R_B 作用下的内力。

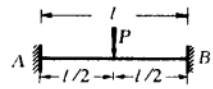
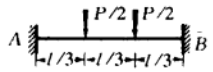
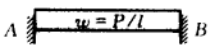
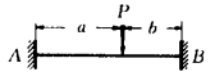
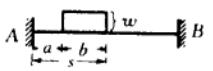
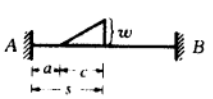
当用转角法求解时，未知数仅为 B 点的转角 θ_{BA}。使用转角法的基本公式，或使用将荷载项分离后的公式

$$\begin{bmatrix} M_{AB} - C_{AB} \\ M_{BA} - C_{BA} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{AB} - R \\ \theta_{BA} - R \end{bmatrix} \quad \text{(前文 5.10)}$$

由于 A，B 点在垂直杆件的方向上均无位移，故杆件转角 $R = 0$，A 点为固定 $\theta_{AB} = 0$，B 点为可动铰支座故 $M_{BA} = 0$，$C_{AB} = -C_{BA} = -Fl/8$(中央集中荷载；参照 5.1.2 项的例题 1 或表 5.1)，将上述条件代入式(5.10)，可得二个未知数(M_{AB}，θ_{BA})的二个方程式

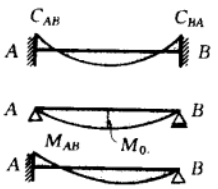
$$\begin{bmatrix} M_{AB} + Fl/8 \\ 0 - Fl/8 \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{BA} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} \theta_{BA} \\ 2\theta_{BA} \end{bmatrix} \tag{c}$$

表 5.1　各种荷载状态下的固端弯矩 C_{AB}，C_{BA}，简支梁的最大弯矩为 M_0，一端铰支时的固端弯矩为 H_{AB}

	C_{AB}	C_{BA}	M_0	H_{AB}
	$-\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{4}$	$-\frac{3Pl}{16}$
	$-\frac{Pl}{9}$	$\frac{Pl}{9}$	$\frac{Pl}{6}$	$-\frac{Pl}{6}$
	$-\frac{wl^2}{12}$	$\frac{wl^2}{12}$	$\frac{wl^2}{8}$	$-\frac{wl^2}{8}$
	$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pab}{l}$	$-\frac{Pab(l+b)}{2l^2}$
	$-\frac{(s-a)w}{12l^2}\{6l^2(s-a)-8(s^2-sa+a^2)l+3(s+a)(s^2+a^2)\}$	$\frac{(s-a)w}{12l^2}\{4(s^2+sa+a^2)l-3(s+a)(s^2+a^2)\}$	$\frac{bcw(2c+b)}{8l^2}\times(4al+2bc+b^2-2)$	$-\frac{(s-a)w}{8l^2}\{4l^2(s+a)-4(s^2+sa+a^2)l+(s+a)(s^2+a^2)\}$
	$-\frac{w}{60l^2b}\{-30al^2(s^2-a^2)+20l(2a+l)(s^3-a^3)-15(a+2l)(s^4-a^4)+12(s^5-a^5)\}$	$\frac{w}{60l^2b}\{-20al(s^3-a^3)+15(a+l)(s^4-a^4)-12(s^5-a^5)\}$	$-\frac{w}{6bl}\{(b+3c)b^2x-l(x-a)^3\},x=\frac{1}{3l}(3al+\sqrt{3b^2l(b+3c)}$	$-\frac{w}{120l^2b}\{-60al^2(s^2-a^2)+20l(3a+2l)(s^3-a^3)-15(a+3l)(s^4-a^4)+12(s^5-a^5)\}$

利用式(c)式的第二个方程，可得 $\theta_{BA}=-Fl/(32EK)$。将之代入式(c)第一个方程可得

$$M_{AB}=-3Fl/16$$



反力 R_B 可根据 A 点的弯矩平衡关系求得

$$-R_Bl+\frac{Fl}{2}+M_{AB}=0 \qquad \text{所以} \quad R_B=\frac{6}{15}F$$

(2) 超静定刚架

当结构稍复杂时，计算需按更规范的格式进行。这里以图 5.7 所示的刚架为例，来说明用转角法求解刚架的方法。

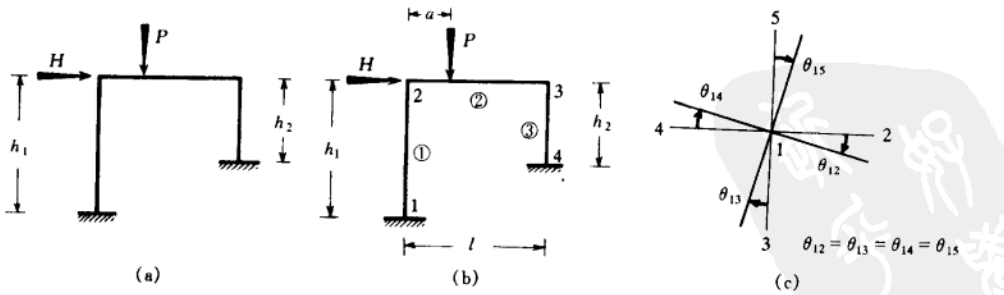


图 5.7　用转角法求解刚架的计算步骤

① 首先对包括支座的所有节点编号，同时也对杆件编号(将号码写入○中)。

② 假定刚节点在转动后杆件之间的角度不变(图5.7(c))。此时有 $\theta_{21}=\theta_{23}=\theta_2$，$\theta_{32}=\theta_{34}$

$=\theta_4$，故基本公式中的转角θ可简单地以节点的编号表示（对非刚接的节点不可这样做，仍需标以二个脚标）。

③ 在各节点，与该节点连接的所有杆件的杆端力矩之和应与作用在该节点的外力矩平衡，故可建立各节点的力矩平衡方程式，将之称为**节点方程**。此时利用转角法的基本公式，用转角来表示杆端力矩，未知数仅限于θ与R这些角度。

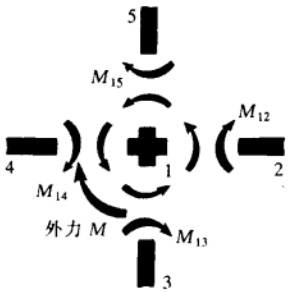


图 5.8 在节点处外力与杆端力矩保持平衡。将之用式子表达出来的是节点方程式

M(外力) $= M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{15}$(杆端弯矩)

④ 当节点发生移动时，必然产生杆件转角R。由于节点方程式的数量等于未知节点转角θ的个数，故当存在杆件转角R时，必须追加建立数量等于杆件转角R个数的方程式。对复杂结构而言，杆件转角的数量是较难确定的。在转角法中假定杆件**无轴向变形**。因此，对图5.9(a)所示的刚架，独立的杆件转角仅一个，故未知的杆件转角也只有一个。图5.9(b)刚架有两个独立的杆件转角，杆件转角之间的关系可根据直角位移图求出，目前暂时只考虑图5.9(a)这种比较明确的刚架。为了求得未知的独立杆件转角而追加的方程式，将有杆件转角的杆件（一般为多个）切断，然后在截面上建立剪力与外力平衡的方程，称之为**层方程**或**剪力方程**。例如，图5.10(a)，(b)，(c)分别为对切出部分建立的方程式。

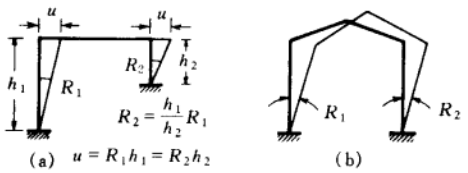


图 5.9 若不考虑结构变形的形式则不能确定杆件转角R的数量。图(a)中R只有唯一的一个，而图(b)中则必须考虑二个R_1，R_2

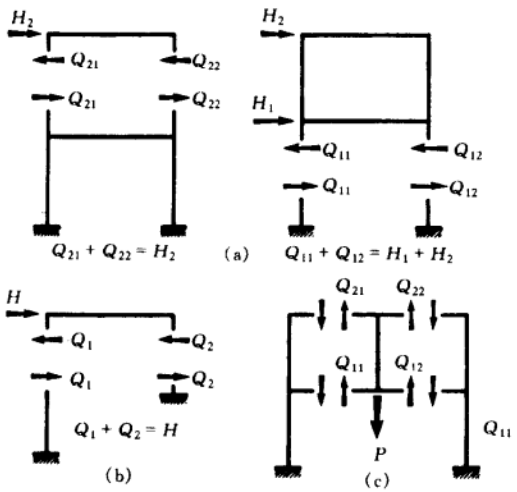


图 5.10 若节点发生移动则必然产生杆件转角。为求R而建立的“剪力平衡式”称为层方程。层方程是用截面将包含了产生R的杆件刚架切断后而建立的平衡方程式

⑤ 组合层方程与节点方程总方程数与未知数θ，R的数量一致，则可建立关于θ，R的多元一次联立方程式，对之求解即可求得θ，R，然后根据θ，R可计算各节点的杆端力矩。由此可求得杆件的弯矩和剪力等。

以上③～⑤所叙述的内容将在例题（图5.7）中予以说明。

本例中独立的未知数为θ_2，θ_3，R_1，共3个，即$\theta_1 = \theta_4 = 0$，$R_2 = (h_1/h_2)R_1$。

对杆件1－2，由于$\theta_1 = 0$，故转角法的基本公式为

$$\begin{bmatrix}M_{12}\\M_{21}\end{bmatrix}=2E_1K_1\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-R_1\\\theta_2-R_1\end{bmatrix} \tag{a}$$

对杆件 2－3 为

$$\begin{bmatrix}M_{23}\\M_{32}\end{bmatrix}=2E_2K_2\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\\theta_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_{23}\\C_{32}\end{bmatrix} \tag{b}$$

对杆件 3－4 为

$$\begin{bmatrix}M_{34}\\M_{43}\end{bmatrix}=2E_3K_3\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_3-\dfrac{h_1}{h_2}R_1\\-\dfrac{h_1}{h_2}R_1\end{bmatrix} \tag{c}$$

接下来，对节点 2 及 3 建立节点方程式，由于没有外力矩作用，故

$$\left.\begin{array}{ll}\text{节点 2} & M_{21}+M_{23}=0\\ \text{节点 3} & M_{32}+M_{34}=0\end{array}\right\} \tag{5.14}$$

另一方面，层方程可根据图 5.10(b) 建立，由于

$$Q_1=-\frac{M_{12}+M_{21}}{h_1},\quad Q_2=-\frac{M_{34}+M_{43}}{h_2}$$

故有

$$H+\frac{M_{12}+M_{21}}{h_1}+\frac{M_{34}+M_{43}}{h_2}=0 \tag{5.15}$$

利用转角法基本公式((a)，(b)，(c))，将式(5.14)、式(5.15)改写成关于 θ，R 的式子，可得以下的三元一次联立方程式。

$$2E_1K_1(2\theta_2-3R_1)+2E_2K_2(2\theta_2+\theta_3)+C_{23}=0 \tag{d}$$

$$2E_2K_2(\theta_2+2\theta_3)+C_{32}+2E_3K_3\left(2\theta_3-3\frac{h_1}{h_2}R_1\right)=0 \tag{e}$$

$$H+\frac{2E_1K_1}{h_1}(3\theta_2-6R_1)+\frac{2E_3K_3}{h_2}\left(3\theta_3-6\frac{h_1}{h_2}R_1\right)=0 \tag{f}$$

(5.16)

对之进行整理，例如将式(f)×(－h_1)等，可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}4(E_1K_1+E_2K_2)&2E_2K_2&-6E_1K_1\\2E_2K_2&4(E_2K_2+E_3K_3)&-6E_3K_3\dfrac{h_1}{h_2}\\-6E_1K_1&-6E_3K_3\dfrac{h_1}{h_2}&12\left[E_1K_1+E_3K_3\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\\theta_3\\R_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-C_{23}\\-C_{32}\\Hh_1\end{bmatrix} \tag{5.17}$$

该式具有下列矩阵形式

$$\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{P} \qquad \text{(前文 4.3)}$$

即

$$\begin{bmatrix}4(E_1K_1+E_2K_2)&2E_2K_2&-6E_1K_1\\2E_2K_2&4(E_2K_2+E_3K_3)&-6E_3K_3\dfrac{h_1}{h_2}\\-6E_1K_1&-6E_3K_3\dfrac{h_1}{h_2}&12\left[E_1K_1+E_3K_3\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2\right]\end{bmatrix}\rightarrow \boldsymbol{K}\text{：刚度矩阵}$$

$$\begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\\ R_1\end{bmatrix}\rightarrow \boldsymbol{u}:\text{位移向量},\quad \begin{bmatrix}-C_{23}\\ -C_{32}\\ Hh_1\end{bmatrix}\rightarrow \boldsymbol{P}:\text{外力向量}$$

刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 永远是对称矩阵。若计算所得的 $\boldsymbol{K}$ 为非对称矩阵则必然是计算有错。为什么 $\boldsymbol{K}$ 为对称的矩阵，可用能量原理进行说明。简单地说，若 $\boldsymbol{K}$ 为非对称则可从物质中无限地获得能量，这是违背能量守衡法则的。

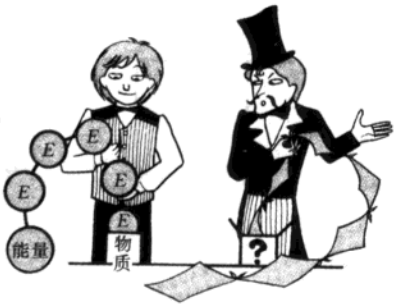


图 5.11 刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为对称矩阵。若为非对称，则人们可从物质中无限地提取能量

式(5.17)是以**连续条件**为前提而建立的**力的平衡式**，该连续条件是指：在节点处产生相同的位移与转角而无错位[①]。

根据式(5.17)求解未知数 θ_2,θ_3,R，然后根据式(a),(b),(c)可计算杆端力矩。杆端力矩即为杆端弯矩。不过，弯矩的符号在某一端与杆端力矩的符号相反(图 5.12(a))。若求出了杆端力矩，则如图 5.12(b)所示可求得剪力

$$Q_{12}=Q_{21}=-(M_{12}+M_{21})/l_{12}$$

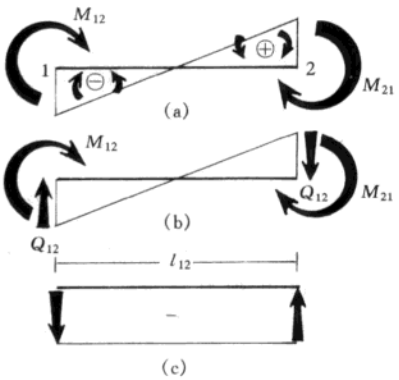


图 5.12 杆端力矩(外力)与杆端弯矩(内力)完全相等。
(a) 当作为目标考虑时应注意符号
(b) 对 2 点取力矩的平衡，有
$M_{12}+M_{21}+Q_{12}l_{12}=0$
所以 $Q_{12}=-(M_{12}+M_{21})/l_{12}$

式(5.17)是根据**节点方程式**(节点处的力矩平衡式)和**层方程式**(建筑物各层的剪力平衡式)推导出来的。那么为什么在节点处仅建立力矩平衡式 $\sum M=0$，而不同时在 x,y 两方向上建立 $\sum X=0,\sum Y=0$ 的力平衡方程？反之，为什么必须考虑麻烦的层方程式呢？答案是明显的，这是由于建立力平衡方程时忽略了轴力产生的杆件轴向的伸缩。前面已多次指出，物体受到外力作用必然产生变形，同时由该变形产生的内力与外力保持平衡。因此，忽略变形也就意味着不可能计算内力的大小，故无法知道杆件对节点的压力或拉力，即不能建立节点处的力平衡方程。

由于忽略了杆件的轴向变形，故不能计算柱所承受的轴向压力或拉力，由此柱可能发生提离(图 5.13(a))，但可从使杆件发生变形的内力间接地求出。

例如图 5.13(b)柱杆件的轴力 V_1,V_2 可由梁的剪力 $Q=-(M_2+M_3)/l$ 算出。即

$$V_1=\frac{M_2+M_3}{l},\quad V_2=\frac{-(M_2+M_3)}{l}$$

这样，对发生弯曲变形并由此产生弯矩的杆件可由弯矩算出剪力。因此，可用通过产生变形杆件的截面将结构切断，建立层方程式(剪力方程式)。

同样，例如对图 5.13(d)所示的问题，在 A,B 处令其发生位移($A,B\rightarrow A',B'$)，得到平衡

① 连续条件也称为相容条件，力的平衡式也称为平衡方程式。

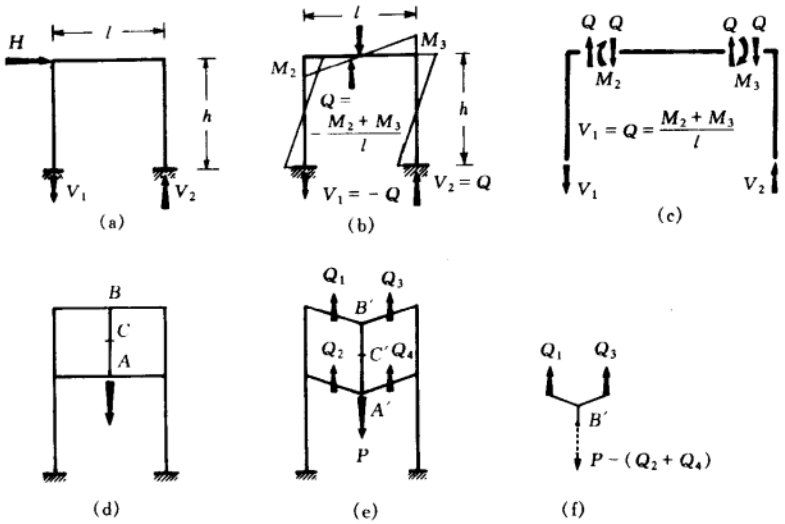


图 5.13 忽略变形在杆件中产生的内力是不可能求出的。由于忽略了柱的轴向伸缩故不能直接求出柱的轴力，但可从梁的剪力间接求出

式

$$P = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

此时虽假定$\overline{AB}$的长度不变即$\overline{AB} = \overline{A'B'}$，但从图 5.13(f) 可清楚地看出在杆件 AB 上作用有等于$Q_1 + Q_3$的拉力。

下面通过例题熟悉用转角法求解超静定刚架的过程。

[例题 1(A 级)] 求图 5.14(a) 所示刚架①的内力。设荷载 6 t/m 中包含了梁的自重，而柱的自重可忽略。

解 由于是对称刚架和对称荷载，故节点 2,3 不发生水平移动。若在左右任何方向有水平移动将会失去对称性，因此有$R=0$。同时节点的转角θ_2，θ_3也是对称产生，有$\theta_2 = -\theta_3$，故只要知道θ_2便可求解该问题。设$\theta_2 = \theta$。

对节点 2 建立节点方程式(力矩平衡式)

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

利用转角法的基本公式，可将其改写为

$$2EK_1(2\theta) + 2EK_2(2\theta - \theta) + C_{23} = 0, \quad C_{23} = -\frac{wl^2}{12}$$

故有

$$\theta = \frac{-C_{23}}{2E(2K_1 + K_2)} = \frac{wl^2}{24E(2K_1 + K_2)}$$

将之代入基本公式

$$M_{21} = 2EK_1 \frac{2wl^2}{24E(2K_1 + K_2)} = \frac{K_1}{6(2K_1 + K_2)} wl^2 \left(= -2C_{23}\left(\frac{K_1}{2K_1 + K_2}\right)\right) \qquad (a)$$

式中

① 将这样的刚架称为门式框架。

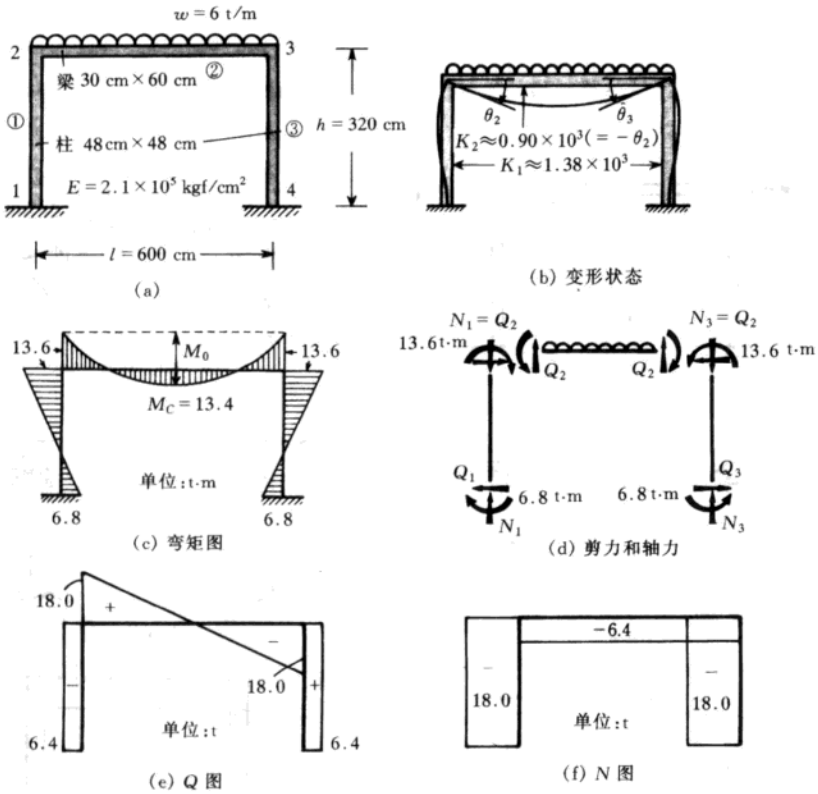


图 5.14 例题 1:节点无位移(当然节点发生转动)

$$K_1 = \frac{I_1}{h} = \frac{(48)^4}{12 \times 320} \approx 1.38 \times 10^3 (\text{cm}^3)$$

$$K_2 = \frac{I_2}{h} = \frac{30 \times (60)^4}{12 \times 600} \approx 0.90 \times 10^3 (\text{cm}^3)$$

$$wl^2 = 6.0 \times (6.0)^2 = 216 \ (\text{t} \cdot \text{m})$$

故

$$M_{21} = \frac{1.38}{6 \times (2 \times 1.38 + 0.9)} \times 216 = 13.6 \ (\text{t} \cdot \text{m})$$

同时由基本公式,有

$$M_{23} = -M_{21} = -M_{32}, \quad M_{12} = \frac{1}{2} M_{21} = 6.8 \ (\text{t} \cdot \text{m})$$

此外杆件 ②(梁)中央的弯矩为

$$M_c = -M_0 + \frac{M_{32} - M_{23}}{2} = \frac{-wl^2}{8} + \frac{13.6 - (-13.6)}{2}$$

$$= -27 + 13.6 = -13.4$$

由图 5.14(d),柱的剪力为

$$Q_1 = Q_3 = -\frac{13.6 + 6.8}{3.2} = -6.4 \ (\text{t})$$

柱的轴力可由荷载(或梁的剪力)得出

$$N_1 = N_3 = -\frac{ql}{2} = -18\ (\mathrm{t})$$

[例题 2(A 级)]　求与例题 1 同样的刚架受水平力 $H = 7.2$ t 作用时的内力。设结构的自重可忽略(图 5.15(a))。

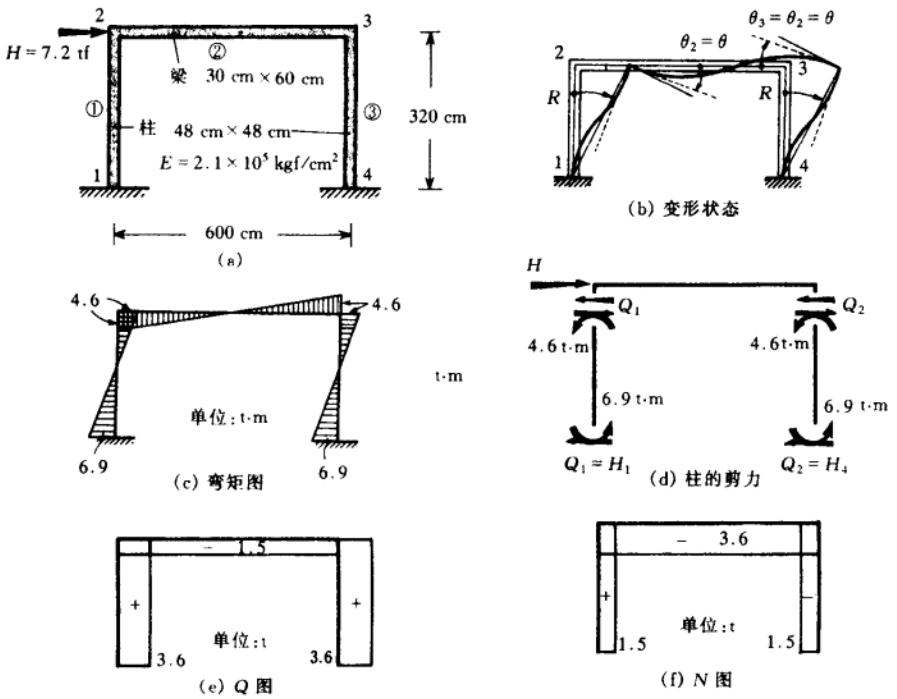


图 5.15　例题 2：有节点位移并产生杆件转角(除节点方程式外还需层方程式)

解　刚架是对称的，而荷载是反对称(点对称)。此时的变形为反对称，节点 2 与节点 3 的转角相等(设为 θ)，杆件 ①，② 的杆件转角相等(设为 R，图 5.15(b))。因此，未知变数为 θ，R 二个，公式也只需建立二个。

节点 2 的力矩平衡式为

$$M_{21} + M_{23} = 0 \tag{a}$$

层的剪力平衡式为

$$H + \frac{M_{12} + M_{21}}{h} + \frac{M_{34} + M_{43}}{h} = 0 \tag{b}$$

根据转角法的基本公式，可将上述关系改写为

$$2EK_1(2\theta - 3R) + 2EK_2(3\theta) = 0 \tag{c}$$

$$2EK_1(3\theta - 6R) + 2EK_3(3\theta - 6R) = -Hh \tag{d}$$

这里考虑到 $K_1 = K_3$，对上式整理并写成矩阵的形式有

$$\begin{bmatrix} 2K_1 + 3K_2 & -3K_1 \\ -3K_1 & 6K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{Hh}{4E} \end{bmatrix} \tag{e}$$

对之求解，可得

$$\theta = \frac{Hh}{4E(K_1 + 6K_2)}$$
$$R = \frac{(2K_1 + 3K_2)Hh}{12EK_1(K_1 + 6K_2)} \tag{f}$$

将上述各值代入转角法的基本公式可求得杆端力矩。

$$M_{12} = 2EK_1(\theta - 3R) = 2EK_1\left[\frac{Hh}{4E(K_1 + 6K_2)} - \frac{3(2K_1 + 3K_2)Hh}{12EK_1(K_1 + 6K_2)}\right]$$
$$= -\frac{(K_1 + 3K_2)}{(K_1 + 6K_2)}\frac{Hh}{2}$$

$$M_{23} = 2EK_2(3\theta) = 2EK_2\frac{3Hh}{4E(K_1 + 6K_2)} = \frac{3K_2}{K_1 + 6K_2}\frac{Hh}{2}$$

在上式中将 $K_1 \approx 1.38 \times 10^3\ \text{cm}^3$，$K_2 \approx 0.90 \times 10^3\ \text{cm}^3$，$h = 3.20\ \text{m}$，$H = 7.2\ \text{t}$ 代入，得

$$M_{12} \approx -6.93 \approx -6.9\ (\text{t} \cdot \text{m})$$
$$M_{23} \approx 4.59 \approx 4.6\ (\text{t} \cdot \text{m})$$

为了校核结果的正确性，下面讨论刚架的总体平衡。

(1) 由图 5.15(b)，(c) 等可清楚地看出，水平外力 $H = 7.2\ \text{t}$ 与柱产生的水平剪力之和 $Q_1 + Q_2 = 3.6 + 3.6$ 平衡。当然，与固定支座处的水平反力 $H_1 + H_4 = 3.6 + 3.6$ 也平衡。

(2) 外力对任意位置取的力矩均应平衡，例如对节点 1 取矩：

外力 H 产生的力矩为	7.2×3.2
反力 V_4 产生的力矩为	-1.5×6.0
(水平反力产生的力矩为零)	
固定端的力矩为	-6.9×2
合计	≈ 0

这表明，计算的结果满足外力之间，外力与内力之间，内力相互之间的力平衡关系，故一般不需一一检验。但是在检验计算中有无错误时，这样的做法是有效的。

[例题 3(B级)] 对例题 1.2 的框架，当梁与柱的刚度比 $k(= K_2/K_1)$ 改变时，求解下列问题并将结果用图表示

(1) 在垂直荷载作用下的柱头弯矩与固定端弯矩之比(忽略符号)将如何变化。

(2) 在水平荷载作用下的反弯点高度与层高之比将如何变化。

解 本例题对理解框架的性质十分有益。

(1) 由于有 $M_{21} = 2C_{23}\left(\frac{K_1}{2K_1 + K_2}\right)$(例题 1 的式(a)式；不计符号)

所以
$$\xi = \frac{M_{21}}{C_{23}} = \frac{2K_1}{2K_1 + K_2} = \frac{2}{2 + k}$$

式中，$k = K_2/K_1$。

k 与 ξ 的关系如图 5.16 所示。当 $k \to 0$ 时 $\xi \to 1$，$k \to \infty$ 时 $\xi \to 0$。

当 k 愈小，即对梁而言柱愈刚，则梁的端部可近似为固定端。反之，当 k 愈大即表示柱的约束愈小，则梁的端部可近似为铰支端，即梁接近于简支梁。

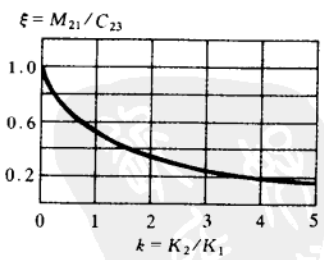


图 5.16 例题 3(1) 的解答 (K_2/K_1 与 M_{21}/C_{23} 的关系)

(2) **反弯点**是指杆件曲率为零的点，同时它还是侧面内力的方向发生变化的点。因此，弯矩在该点为零(图 5.17)。

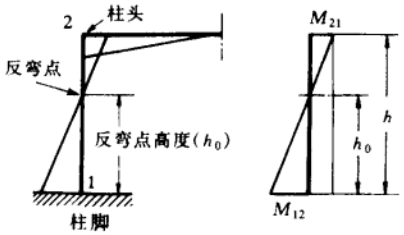


图 5.17　反弯点是指柱等杆件中弯矩为零的点(在该点弯矩的符号发生变化)。从柱脚到反弯点的距离称为反弯点高度(h_0)

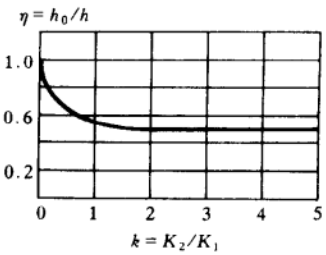


图 5.18　例题 3(2) 的解答(K_2/K_1 与 h_0/h 的关系)

$$\eta = \frac{h_0}{h} = \frac{M_{12}}{M_{12}+M_{21}} = \frac{\dfrac{Hh}{2}\left(\dfrac{K_1+3K_2}{K_1+6K_2}\right)}{\dfrac{Hh}{2}\left(\dfrac{3K_2}{K_1+6K_2}+\dfrac{K_1+3K_2}{K_1+6K_2}\right)} = \frac{K_1+3K_2}{K_1+6K_2} = \frac{1+3k}{1+6k}$$

式中，$k = K_2/K_1$。

将 $\eta-k$ 关系用图表示为图 5.18。有 $k \to 0$，$\eta \to 1$，$k \to \infty$，$\eta \to 0.5$。

[例题 4(B 级)]　求例题 1.2 刚架的水平方向固有周期和固有频率。设材料的相对体积质量为 2.4。

解　如图 5.19 所示，将金属丝弯成门式框架，在底部用粘纸带将其固定在厚的纸内。在水平方向张拉后松开，金属丝框架便发生振动然后逐渐停止。大的建筑物的振动与本例金属丝框架的振动基本上无区别。对之进一步简化，将质量集中在梁的位置，这与弹簧－质量体系的振动是一样的(图 5.20)。解决工程问题的原则是："当出现难于求解的问题时，可将之简化为最简单的问题来考虑"，按此原则首先来考虑弹簧－质量体系。

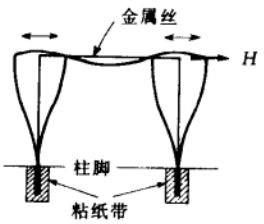


图 5.19　将金属丝弯成门式框架，在相当于柱脚的部分固定。给一个水平方向的冲击，框架便发生振动。这与在水平方向用绳拉建筑物，然后切断使建筑物发生自由振动的模型相当

将该体系张拉后松开，取发生振动的某一个时刻，即考虑某一瞬间的状态。弹簧较原来的状态伸长了 u，因此，质量 m 受弹簧向上的拉力 ku 的作用。取 y 轴的正向为垂直向下，则在 $u>0$ 时力 ku 为负值。对运动的物体应用牛顿第二定律 $F=ma$。读者对结构力学中的力平衡方程一定很熟悉，而对运动中的不平衡物体则觉得难以处理。达朗贝尔对这样的问题首先提出了如同力的平衡的解法。他提出的方法从数学上讲是简单地将牛顿第二定律的右项移到左边。即

$$F = ma \quad (\text{牛顿第二定律})$$
$$F - ma = 0 \quad (\text{达朗贝尔原理}) \qquad (5.18)$$

将达朗贝尔的公式写成 $F+(-ma)=0$ 后，可作如下的考虑，即"质量为 m 的物体，在力 F 的作用下以加速度 a 运动，若对之施加 $-ma$ 的假想力(将之称为**惯性力**)，则力的平衡式成立"。

运动中的物体若加上惯性力也可使用力的平衡式，这样问题就变得简单了。因此，对弹簧－质量体系(图 5.20(c)) 有

$$F = -ku$$
$$-ma = -m\ddot{u}\ (\ddot{u} = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2)$$

则达朗贝尔的公式可写成

$$-ku - m\ddot{u} = 0$$

最后得

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

求解该微分方程，可得

$$u = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

式中，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$。

求 u 对 t 二次微分

$$\dot{u} = A\omega(-\sin\omega t) + B\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{u} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$= -\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = -\omega^2 u = -\frac{k}{m}u$$

A，B 为积分常数。在求挠度曲线时积分常数 c_1，c_2 是根据边界条件（支承条件）确定的，这里的积分常数则根据 $t=0$ 即振动开始时的条件（称之为初始条件）来确定。例如开始时以 a(cm) 的位移拉伸，将之轻轻松开[1]后，有初始条件

$$t = 0 \quad \begin{cases} u = a \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

代入初始条件后得：$A = a$，$B = 0$。将 u 与 t 的关系用曲线表示，即为图 5.21 所示的余弦曲线。由于每隔 $\omega t = 2\pi$ 重复同样的运动，故称 $T = 2\pi/\omega$ (s) 为固有周期，称 $f = 1/T$ (s^{-1}，Hz) 为固有频率，称 ω (rad/s) 为固有圆频率。对本例，有（关于固有周期参见附录 5(6)）

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\Big/\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,(\mathrm{s})$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,(\mathrm{Hz})$$

回到原问题就门式框架考虑以下几个问题。

(1) k 的计算：弹簧常数 k 的计算，很清楚地应等于 $u=1$ 时的力 P，这可从关系 $P = ku$，即 $k = P/u$ 得出。对例题的框架，当 $H = 7.2$ t 时产生的杆件转角为 R。即梁的水平位移为 $u = Rh$（参照图 5.22）。因此有

$$k = P/u = H/Rh$$

根据例题 2 的式(f) 有

$$R = \frac{(2K_1 + 3K_2)Hh}{12EK_1(K_1 + 6K_2)}$$

将 $K_1 \approx 1.38\times10^3\ \mathrm{cm}^4$，$K_2 \approx 0.9\times10^3\ \mathrm{cm}^4$，$h = 3.2$ m，$E = 2.1\times10^7$ kgf/cm²[2] 代入式中，有

$$k = \frac{12EK_1(K_1 + 6K_2)}{h^2(2K_1 + 3K_2)}$$

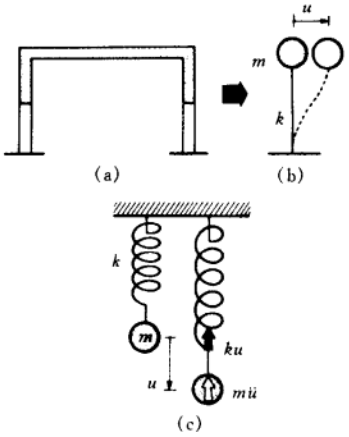


图 5.20 将建筑物的质量集中到梁（或楼板）上，可作为弹簧－质量体系来考虑

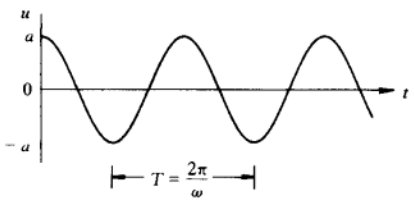


图 5.21 例题 4 的解答：弹簧－质量系以频率 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$，位移 $u = a\cos(\omega t)$ 振动（$\omega = 33.1$）

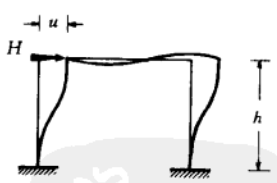


图 5.22 用水平力 H 推建筑物使其发生变形 u，则建筑物水平方向的弹性常数为 $k = H/u$

[1] 即无初速度地释放质量块。

[2] 一般用 kg，t 来表示力的单位，严格地说应使用 kgf，tf 来记叙，它表示了（单位质量）×（重力加速度）。对本例这样的振动问题需特别注意（参见第 2 章第 9 节）。

$$= \frac{12 \times 2.1 \times 10^2 \times 1.38 \times (1.38 + 6 \times 0.9) \times 10^6}{(3.2)^2 \times 10^4 \times (2 \times 1.38 + 3 \times 0.9) \times 10^3}$$

$$= 42.2 \text{ (tf/cm)}$$

(2) m 的计算：质量 m 分布在柱、梁中，这里可大胆进行近似，即假定将柱的上半部分和梁的质量集中在梁的中部(参照图 5.20)。其结果，当仅考虑自重时重量为

$$W = 2.4 \times \left[(0.48)^2 \times \frac{3.2}{2}(\text{柱}) \times 2\right] + 2.4 \times [(0.6 \times 0.3)(\text{梁}) \times 6.0]$$

$$\approx 1.77 + 2.59 = 4.36 \text{ (tf)}$$

则质量为

$$m = W/g = 4.36/980 \approx 4.45 \times 10^{-3} (\text{tf} \cdot \text{s}^2/\text{cm} = \text{t})$$

(3) ω、T、f 的计算：根据(1)、(2)的结果，有

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx \sqrt{\frac{42.2}{4.45 \times 10^{-3}}} \approx 97.4$$

$$T = 2\pi/\omega \approx 0.065 \text{ (s)}, \quad f = 15.5 \text{ (Hz)}$$

这是相当高的频率值。

若如例题 1 那样再考虑梁上固定荷载 6 tf/m，$W = 1.77 + 6.0 \times 6.0 = 37.77$ tf，则有

$$m \approx 37.77/980 \approx 0.038\,5$$

$$\omega \approx \sqrt{42.2/0.038\,5} \approx 33.1$$

$$T = 2\pi/\omega \approx 0.19 \text{ (s)}, \quad f = 5.3 \text{ (Hz)}$$

对一般的建筑物，由于楼板上的固定荷载(自重和固定机器类的重量)比柱的自重大，故可如本例那样将质量集中到楼板和梁上。但当质量分散难以将之假定为集中质量时，需考虑分散质量的影响。



5.2 刚臂法

在转角法中需求解以节点转角 θ 和杆件转角 R 为未知数的多元联立方程式($[A]\{x\} = \{B\}$ 形式的方程式)。但在没有计算机的时代，即使求解只有 10 个左右的未知数也需化几天的时间，工作量很大，并随着未知数数目的增大所需的计算时间以几何级数增长，故要想得到正确的答案是十分困难的。因此，试图用转角法和手算来计算多节点框架的内力事实上是不可能的。在 20 世纪 30 年代，克劳斯(Cross)巧妙地利用了结构的特性提出了用渐近方法求解刚架内力的方法，这就是**刚臂法**或**刚臂弯矩法**。



5.2.1 刚臂法的原理与步骤

刚臂法的基本公式仍然是梁的基本公式($\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2 = M/EI$)，这与转角法在本质上没有区别。构成其计算基础的 3 个要点如下文所述，也是从转角法的基本公式推导出来的。可将刚臂法和转角法这两种方法的不同点归纳如下。

(1) 转角法：利用转角法的基本公式，建立刚架总体的力平衡方程($\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{P}$)，对该式求解求得位移 $\boldsymbol{u}$(实际是转角 θ、R)并由此求出内力。

(2) 刚臂法：

① 将各节点固定，在不准节点转动的状态下施加荷载或强制变形，计算各杆端产生的内力(弯矩)**数值**。

② 然后在保持节点力矩平衡的条件下逐一解除各节点的固定约束(其它节点仍固定)，对上一步求得的杆端弯矩进行修正。反复进行上述计算过程可得到逐渐接近正确值的解。

在刚臂法中，由于计算是在刚架图上进行的，故设计人员可较好地掌握刚架的内力状态，在这一点上刚臂法要比转角法优越。

先对刚臂法的 2 个要点叙述如下。

① 当多根(n 根)一端固定的杆件，另一端交汇于一点(o 点)时，则作用于 o 点的外力矩 M_o 按各杆件的**分配率**成比例地分配到各杆件上，即当将杆件 oi 的分配率记为 μ_i[①] 时，作为杆端力矩作用在 o 端的力矩 M_{oi} 为 $M_{oi}=\mu_i M_o$。当然在杆件 o 端的内力(弯矩)也是 $\mu_i M_o$。(图 5.23)

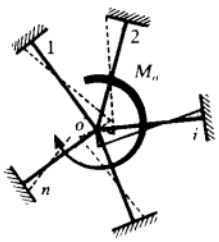


图 5.23 刚臂法的基本公式——其①

$M_{oi}=\mu_{oi}M_o$

式中分配率 $\mu_{oi}=E_iK_i\Big/\sum_{j=1}^{n}E_jK_j$

② 在杆件另一端(固定端)产生的杆端力矩为 M_{oi} 的一半，即 $M_{oi}/2$，将之称为**传递力矩**(图 5.24)。

[证明] 可简单地由转角法的基本公式推导出 ① 和 ②。

设在外力矩 M_o 作用下 o 点不发生移动只产生转角 θ_o，由于 $\theta_i=0$、杆件 oi 的杆件转角 $R_{oi}=0$，故杆件 oi 在 o 点的杆端力矩可由转角法的基本公式求得为

$$M_{oi}=2E_iK_i(2\theta_o)=4E_iK_i\theta_o \qquad \cdots (a)^{②}$$

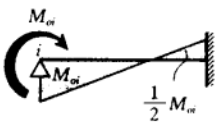


图 5.24 刚臂法的基本公式——其②

$M_{io}=CM_{oi}$，$C=0.5$(传递率)

利用该式计算所有杆件($i=1,2,\cdots,n$)的杆端力矩，则总和应与作用在节点 o 上的外力矩 M_o 相等

$$M_o=\sum_{j=1}^{n}M_{oj}=4\theta_o\sum_{j=1}^{n}E_jK_j$$

所以

$$\theta_o=\frac{M_o}{4\sum_{j=1}^{n}E_jK_j} \qquad (b)$$

将式(b)代入式(a)，有

$$M_{oi}=\frac{4E_iK_iM_o}{4\sum_{j=1}^{n}E_jK_j}=\mu_{oi}M_o \qquad (5.19)$$

$$\mu_{oi}=\frac{E_iK_i}{\sum_{j=1}^{n}E_jK_j}\text{(为 } oi \text{ 杆的分配率)}$$

式(5.19)即表示了要点 ① 的内容。

① μ 相当于英语的 m。

② E,K 的脚标规定如下：当杆件名明确时为杆件名(一个脚标)，当杆件名不明确时为杆端的节点名(二个脚标)。故此时有 $E_i=E_{oi}$，$K_i=K_{oi}$，μ 等也按此原则规定。

② 同样，也可由转角法的基本公式求得

$$M_{ik} = 2E_iK_i(\theta_i) = M_{ik}/2 \tag{5.20}$$



5.2.2　刚臂法的求解

(1) 节点无移动的情况

用例题进行说明。

[例题 1(A) 级]　用刚臂法求出图 5.25(a) 的弯矩。本题与 5.1.3 节(1) 中解说的问题相同。

解　(1) 首先**固定杆端**。此时 A，B 的杆端力矩为 $\pm Pl/8$(图 5.25(b))。

(2) 在 B 点，由于实际的杆端力矩必须为零，故**解除该节点的固定约束**。在计算的操作上是施加 $-Pl/8$ 杆端力矩以使 B 点的杆端力矩从 $+Pl/8$ 变为零。此时在另一端 A 产生 1/2、即 $-Pl/16$ 的力矩(图 5.25(c))。

(3) 将图 5.25(b) 与图 5.25(c) 叠加得图 5.25(d)。

将刚臂法与前文根据梁的基本公式($d^2v/dx^2 = M/EI$) 求解的 5.1.3 节相比，可见本法要简便得多。对这样简单的问题若用 5.1.3 节的转角法求解也可容易地得到结果。

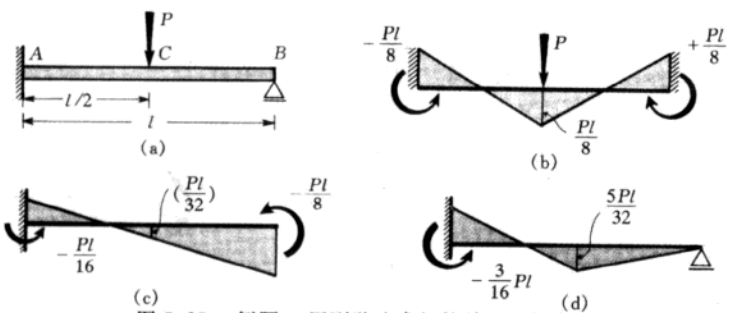


图 5.25　例题 1：用刚臂法求解简单的超静定梁

(b) 固定节点(节点不转动)。由于荷载 P 产生固端弯矩。

$$C_{AB} = -Pl/8, C_{BA} = +Pl/8$$

(c) B 点为可动铰支座，可转动故 $M=0$。因此在 B 点施 $-Pl/8$ 的力矩。将 1/2 的力矩传递到另一端 A 点。

(d) 在 A 点作用的力矩为

$$-Pl/8 + (-Pl/8) \times 1/2 = -3Pl/16$$

[例题 2(A) 级]　求出图 5.26 的内力(弯矩)(本题与 5.1.3 节的[例题 1] 相同)。

解　除了例题 1 那样的简单问题外，刚臂法的计算需画出刚架图并在图上进行计算，这样可防止出错。如图 5.27 所示，在梁的下方和柱的两侧留出计算空间。柱的左侧为该柱柱头①的计算空间，柱的右侧为上一层柱柱脚的计算空间。在梁、柱的中央分别记下各自的 EK②。在计算空间中顺次地记下：分配率 μ，第一次的固端力矩 $FEM_1$③，第一次的分配力矩 D_1，第一次的传递力矩 C_1；以后为第二次的 FEM_2，D_2，C_2；第三次的

① 将柱上端的杆端力矩称为柱头力矩，将柱下端的杆端力矩称为柱脚力矩。

② 当全刚架的 E 相同时，可简单地记入 K 或记入用标准值 K_0 除后的 $k(K/K_0)$。

③ FEM 为固端力矩(Fixed End Moment) 的简称。注意不要与 FEM(Finite Element Method：有限元法) 混淆。

FEM_3，D_3，C_3；…。至于计算在何时结束需根据收敛情况而定，一般可迭代三到五次，即 $D_3 \sim D_5$ 结束。对一般节点的计算在 D 结束，对支承点的计算在 C 结束。当可忽略节点移动时，FEM 仅取 FEM_1 即可，FEM_2 以后为空栏。计算的顺序如下。

(1) 若计算用的刚架图(图 5.27)已准备好，首先计算梁柱的 EK 并记入图中。对本问题，设 E 为常数 $E = 2.1 \times 10^5$ kgf/cm^2。

柱：截面为 48 cm 见方，长度为 3.2 m，故有

$$K_{12} = K_{34} = I/l$$
$$= (48)^4/(12 \times 320)$$
$$= 1.38 \times 10^3$$

当设标准刚度 $K_0 = 1 \times 10^3$ 时，刚度比为

$$k_{12} = k_{34} = 1.38$$

梁：截面为 30×60 cm，长度为 6.0 m，故有

$$K_{23} = 30 \times (50)^3/(12 \times 600)$$
$$= 0.9 \times 10^3, k_{23} = 0.90$$

(2) 计算 μ。节点 1，4 为固定端，不需计算 μ。

节点 2：

柱头的分配率

$$\mu_{柱头} = 1.38/(1.38 + 0.90)$$
$$\approx 0.605 \rightarrow 0.61^{①}$$

梁左端的分配率

$$\mu_{梁左} = 0.90/(1.38 + 0.90)$$
$$\approx 0.395 \rightarrow 0.39$$

节点 3：与节点 2 相同 $\mu_{柱头} \rightarrow 0.61$，$\mu_{梁右} \rightarrow 0.39$

在图 5.28 中写入 μ 的数值。

(3) 认为节点 2，3 处于无转动的固定状态，施加荷载。在图 5.29(a) 中节点 2 的 FEM_1 为 $-wl^2/12$，节点 3 为 $+wl^2/12$。由 $w = 6$ t/m，$l = 6$ m 得 $FEM_1 = \mp 18$ t·m。在图 5.28 中写入 FEM_1 的值。

(4) 在当前状态下，例如节点 2 中柱头力矩为零、梁左端力矩为

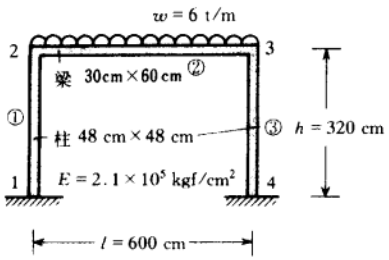


图 5.26 例题 2(与转角法的例题 1 为同一问题)

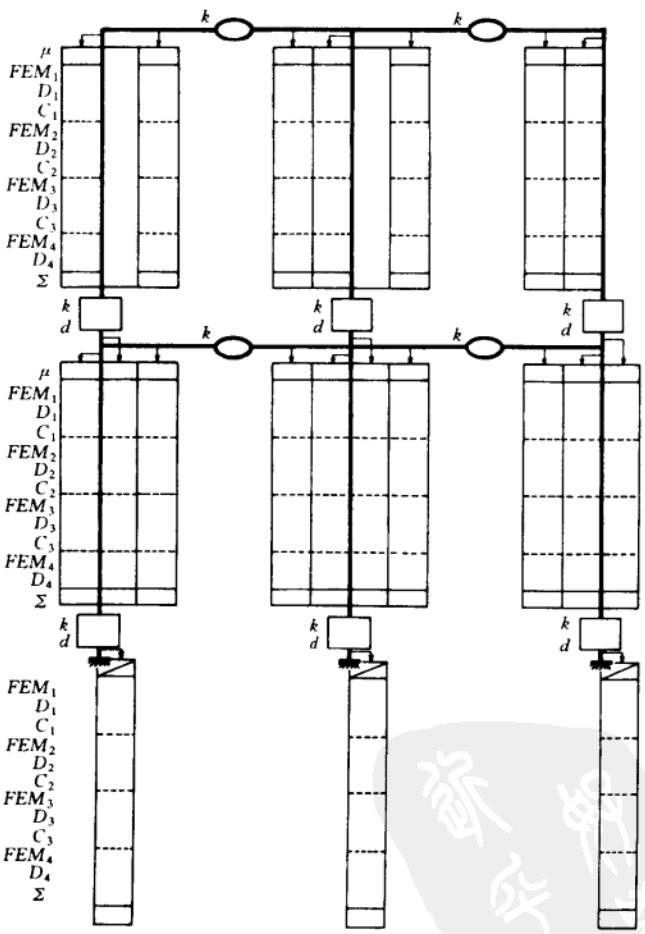
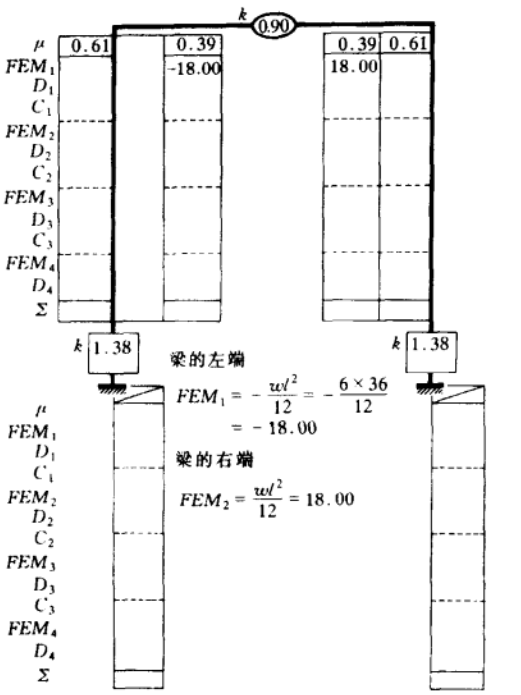
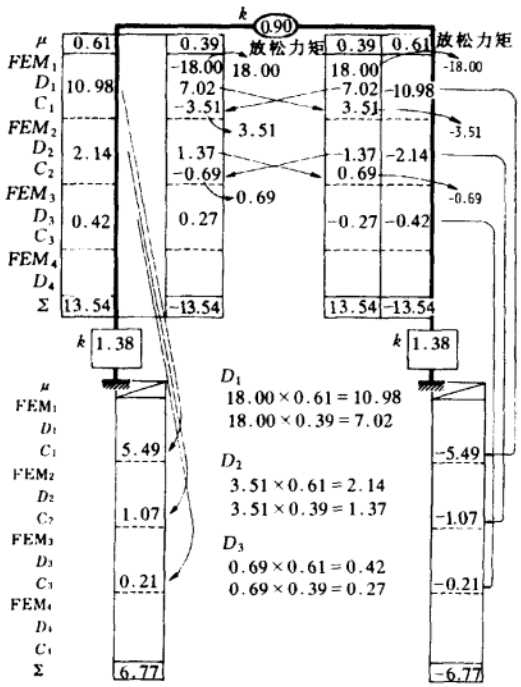


图 5.27 在刚架图上留出数值计算用的空间

① 将连接于一个节点的所有杆端 μ 值相加当然应等于 1。由于外力或荷载的精度一般较低，有效数字仅为一或两位，故 μ 的数值取两位是足够的。在使用计算器的年代 μ 取到三位并不增加计算时间，故本例取两位，不考虑四舍五入是可以的。



(a) 计算 μ 并写入 FEM



(b) 经过三次计算(到 D_3 为止)已收敛,计算结束

图 5.28 在刚架图上进行例题 2 的计算。由于不产生杆件转角 R,故在 FEM 一栏中除 FEM_1 外均为空栏

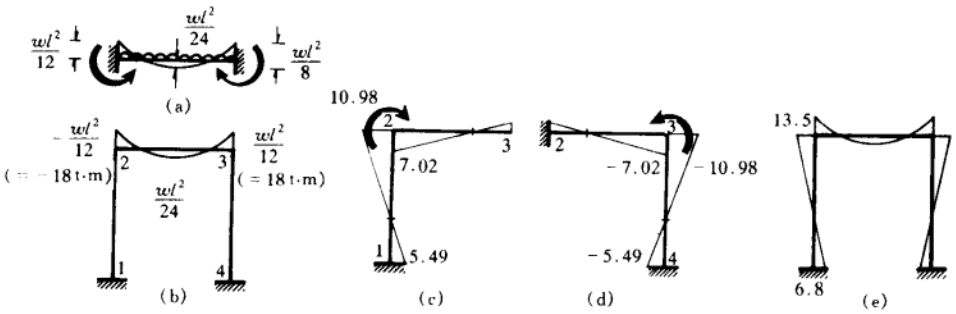


图 5.29 例题 2 的计算过程(与图 5.28 对比)

(a) 固定节点 2、3,施加荷载。

(b) 由于固定,节点 2、3 的力矩平衡不成立。

(c) 为抵消节点 2 的不平衡力矩,施加 +18 t·m 的力矩。

(d) 对节点 3 同样施加不平衡力矩(这里为 −18 t·m)。

(e) 反复计算的结果:得到各节点平衡的弯矩图(解答)。并可根据该 M 图画出 N 图、Q 图

−18 t·m,故不能保持平衡。因此解除节点 2 的固定约束(图 5.29(c)、(d))。在计算时将不平衡力矩的符号改变所得的外力矩 +18 t·m 施加到节点 2 上让其转动。称该外力矩为**放松力矩**。本操作在 D_1 栏中进行,即将节点上存在的不平衡力矩的符号改变(−18 t·m→+18 t·m),并将之分配到交于节点 2 的各杆件(1-2 杆件,2-3 杆件)上去。在柱头上分配到(+)18 t·m × 0.61 = 10.98 t·m,在梁的左端分配到(+)18 t·m × 0.39 = 7.02 t·m 的力矩。对节点 3 进行同样的操作(注意符号)。

(5) 由于假设各节点杆件的另一端是固定端,因而进行力矩分配时,取 D_1 的一半作为 C_1 传递到固定端并将其记入图中。由此,对节点 2 从梁的右端传来 −3.51 t·m,节点 2 的力矩平衡再次被破坏。

(6) 因此,为了消除该不平衡力矩,再次将符号改变的传递力矩作为外力矩作用于节点,进行分配操作,即对 D_2 计算。在节点 2 有:−3.51 t·m(符号改变)→+3.51 t·m(分配),柱:2.2 t·m,梁:1.4 t·m①。节点 3 有:柱:−2.14 t·m,梁:−1.37 t·m。

(7) 下面进行 C_2、D_3 的计算。不平衡力矩在 C_2 计算结束时为∓0.69,它比开始时 FEM_1 的 5% 还小,故运算到 D_3 时精度已足够可结束计算。结束计算后,对 FEM、D、C 纵向求和($\sum$ 的栏),这就是杆端力矩,同时也是在杆端产生的弯矩(图 5.29(e))。在各节点将上述力矩相加,总和应为零,若不为零表示计算有误,需进行检查。

将计算结果与用转角法计算所得的 5.1.3 节例题 1 的结果比较可见,用刚臂法计算到 D_3 时求解的精度在实用上已经足够。从本例可清楚地看出,与一般节点相比,固定端(节点 1、4)由于不需进行解除固定约束,即 D 的计算十分简单。因此,在实际情况中杆件的另一端不是固定端,可有条件地将其简化成等价的固定端。下面的[例题 3]是用简化方法来求解上述的[例题 2]。

[例题 3(A)级] 例题 2 中的刚架为对称且荷载也对称(图 5.30(a))。利用刚架和荷载的对称性求内力。

解 研究 2-3 杆件(梁),该杆件的变形当然是关于对称轴对称的,故节点转角有以下关系成立(图 5.30(b)):$\theta_2 = -\theta_3$。此时当然不产生杆件转角。

将该关系代入转角法的基本公式,有

$$M_{23} = 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3) + C_{23} = 2EK_{23}(\theta_2) + C_{23} = 2E\left(\frac{1}{2}K_{23}\right)(2\theta_2) + C_{23}$$

① 将分配后的力矩(柱 2.14 t·m,梁 1.37 t·m)相加应等于分配前的力矩(3.51 t·m),这可由 $\sum\mu = 1$ 清楚地看出,但在实际计算中需注意数值的四舍五入情况。

从公式的形式来看，对节点2的转动而言与连接一端固定杆件（即2′—3′杆件，不过此时该杆件的刚度为 K_{23} 的一半 $K_{23}/2$）的情况完全相同（图5.30(c)）。

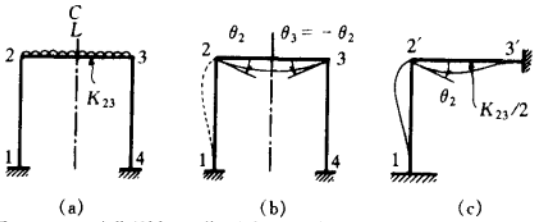


图5.30　对称刚架上作用有对称荷载时，变形也对称，因此只对半边进行计算即可

根据转角法，只要知道节点转角和杆件转角便可确定内力。因此可将由杆件2—3构成的刚架（图5.30(b)）置换成由杆件2′—3′构成的刚架（图5.30(c)），此时两种模型中节点1,2的计算结果应相同，但对节点3,4该怎么办？可利用变形对称，节点3,4的位移、内力与节点1,2的位移、内力对称。这里将计算的过程整理如下（图5.31为计算的流程图）。

对本例而言（对称刚架—对称荷载的情况，与对称轴正交的杆件——2-3杆件），为了对一端固定杆置换所需的刚度置换系数为1/2。根据 $K_{23}=0.9\times10^3$，$k_{23}=0.9$，有

$$K_{2'3'}=0.5\times0.9\times10^3$$

$$k_{2'3'}=0.5\times0.9=0.45$$

将 $k_{2'3'}$ 称为**有效刚度比**。

此时的分配率为

$$\mu_{柱头}=1.38/(1.38+0.45)\approx0.75$$

$$\mu_{梁左}=0.45/(1.38+0.45)\approx0.25$$

从公式可清楚地看出，在使用有效刚度比时 *FEM* 保持不变，$C_{23}=-18\ \mathrm{t\cdot m}$[①]。图上的计算如图5.32所示。与例题2相比可见本方法十分简单。梁左端的 $D_1(=4.5\ \mathrm{t})$ 的一半2.25 t传递到梁的固定端，该端是置换后设置的固定端，由于我们对固定端将产生多大的内力不感兴趣，故没有必要计算。

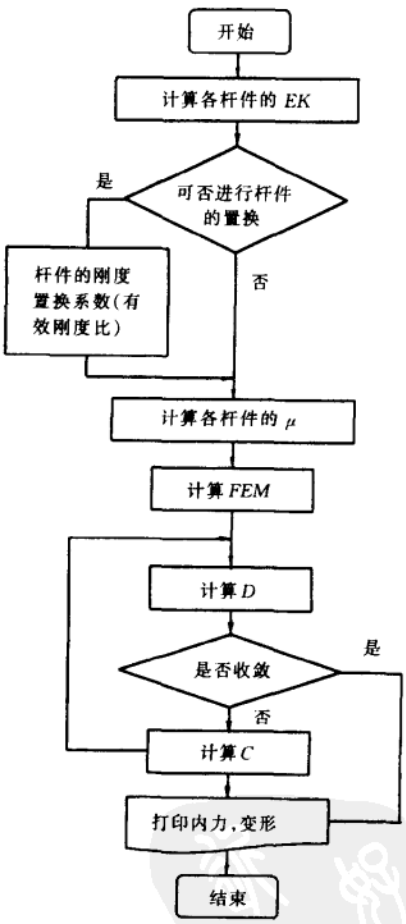


图5.31　用刚臂法求解无杆件转角刚架的流程图

(2) 有节点移动的情况（产生杆件转角的情况）

下面就产生杆件转角（R）的情况，取与例题2,3完全相同的刚架，在节点2上作用水平力 $H(=7.2\ \mathrm{t})$，然后求解。首先说明刚臂法的第三个基本要点，即柱的**分担系数**。如图5.33(b)所示，首先不容许节点转动（因此 $\theta_i=\theta_j=0$），使节点发生水平移动。此时，柱中产生的剪力（$\sum Q_r$）与外力 H 保持平衡。此时的变形仅有杆件转角 R，故 r 柱（$i-j$ 杆件）中产生的剪力可利用转角法的基本公式得到

$$Q_r=-\frac{M_{ij}+M_{ji}}{h_r}=-\frac{2M_r}{h_r}$$

① 请不要产生以下误解："由于刚度比为一半，故应取跨度 l 的2倍来求 *FEM*"。由于在置换成一端固定的杆件时保持了跨度 l 不变，故对刚度比进行修正。

$$= \frac{12E_rK_r}{h_r}R_r = \frac{12E_rK_r}{h_r}\frac{u}{h_r}$$

所有柱剪力的合力与水平外力 H 保持平衡，由此可求得位移 u。设剪力的总和为 s，有

$$H = \sum Q_r = u\sum \frac{12E_rK_r}{h_r^2},\quad u = \frac{H}{12\sum(E_rK_r/h_r^2)} \tag{5.22}$$

因此，为产生图 5.33(b) 所示的变形需在 r 柱上作用的杆端力矩为

$$M_r = 2E_rK_r(-3R_r) = -6E_rK_r\frac{u}{h_r}$$

$$= -\frac{E_rK_r/h_r}{2\sum(E_rK_r/h_r^2)}H = d_r^*H \tag{5.23}$$

式中

$$d_r^* = -\frac{E_rK_r/h_r}{2\sum(E_rK_r/h_r^2)} \tag{5.24}$$

将 d_r^* 称为**分担系数**。上式表明，用水平外力的和 H(即层的剪力) 乘以该 d_r^* 可算得 r 柱的 FEM，很清楚，d_r^* 具有长度的量纲。

在一般的建筑结构中同一层的柱往往是等高的(图5.33(d))，此时的 M_r 与 H 关系更简单。设 $h_r = h$，式(5.23) 变为

$$M_r = -\frac{E_rK_r}{2\sum E_rK_r}Hh = d_rM_{\Pi} \tag{5.25}$$

式中

$$d_r = -\frac{E_rK_r}{2\sum E_rK_r} \tag{5.26}$$

$$M_{\Pi} = Hh \tag{5.27}$$

式中的 d_r 称为**分担率**，无量纲。M_{Π} 为层剪力与层高之积，称之为层的总力矩。上式表明，分担率 d_r 与总力矩 M_{Π} 之积即为 r 柱的 FEM。使用 d_r^* 还是 d_r 是根据刚架的层高是否相等来选取的。

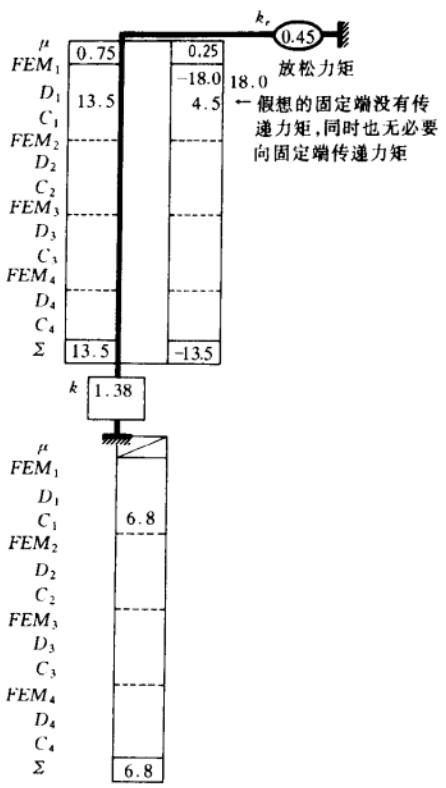


图 5.32 例题 3：利用刚架和荷载的对称性求解例题 2(该例题仅需分配一次 D_1 便可得到结果)

有水平移动的刚架可利用上述分担系数的概念用刚臂法进行简单地求解。首先将节点转动约束，根据分担系数将水平移动(杆件转角) 引起的 FEM 施加到柱上。此时，由于节点失去了力矩的平衡，为消除该不平衡，力矩解除节点的转动约束。这样，由于解除了柱上的强制约束，柱的剪力也减小，它与外力 H 的平衡便不能保持。为了保持与水平力的平衡需加大 R，此时在上述放松的位置再次约束节点的转动。在这种情况下，刚臂法的求解过程即为重复以下步骤，逐渐逼近正确解：

(1) 约束节点的转动(节点方程式不成立)；

(2) 令产生水平移动，使柱的剪力与外力 H 平衡(满足层方程式)；

(3) 解除节点约束，令节点力矩平衡(满足节点方程式，层方程式不成立)。

对例题所示柱高相等的情况，渐近法操作过程为反复执行以下步骤：

① 首先计算各层的 $M_{Tl.}$；

② 将 $M_{Tl.}$ 乘以各柱的 d_r 求得各柱的 FEM；

③ 然后计算各节点的不平衡力矩($FEM+C$)(传递力矩 C 的初值为零)；

④ 将不平衡力矩反向(符号相反)，然后加到节点上计算 D；

⑤ 计算传递力矩 C，再回到①。

第一次的 $M_{Tl.}$ 为 Hh，第二次后可将由不平衡的柱剪力 ΔQ 所产生的力矩之和作为 $M_{Tl.}$，即

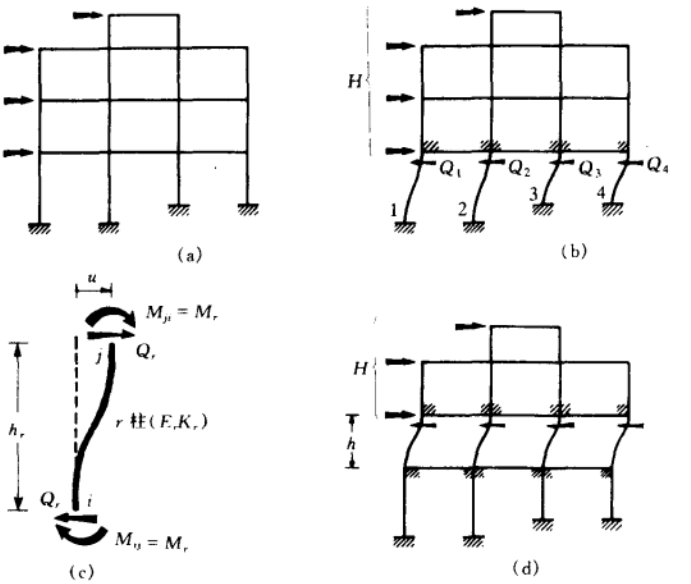


图 5.33　当节点有移动产生杆件转角时，刚臂法的求解原理——分担率的导入。(a) 产生杆件转角的一般刚架。(b) 将层高不等的最下层的上下节点约束住，令其只产生杆件转角 R。$H=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$，保持平衡。但实际上 $H>Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$。(c) 分离 r 柱，利用转角法的基本式推导分担系数。(d) 若层高相等，可简化分担率的公式。

$$\sum \Delta Q h = \sum \frac{D_{柱}+C_{柱}}{h} h = \sum (D_{柱}+C_{柱}) \tag{5.28}$$

只需使用计算器便可利用刚臂法求解大的刚架，故有应用价值。过去使用算盘或计算尺计算，该法对最多只有二位精度的荷载也足够精确。在使用计算器和计算机计算时，取高位的有效数字是没有意义的，也是浪费。当手算时，对未知数为 4 个以上的问题推荐使用刚臂法而不使用转角法。刚臂法在熟练以后是一种既简单又可靠的方法。"熟能生巧"，让我们试着来求解例题吧。

[例题 4(A)级]　用刚臂法求解已用转角法求解过的例题 2(5.1.3 节)(图 5.34)。

解　由于各杆件的 E 相同可不考虑。

(1) 杆件的刚度

$$K_{12}=K_1=(48)^4/(12\times 320)\approx 1.38\times 10^3\ \text{cm}^3$$

因为　$K_0=1.0\times 10^3\ \text{cm}^3$

所以　$k_1=1.38$

$$K_{23}=K_2=30\times(60)^3/(12\times 600)$$
$$=0.90\times 10^3\ \text{cm}^3$$

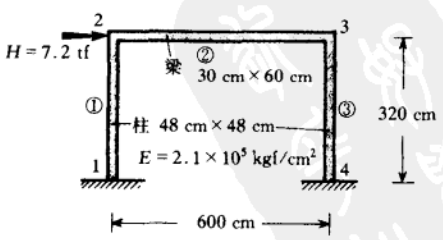


图 5.34　例题 4(与转角法的例题 2 为同一问题)

所以 $k_2 = 0.90$

$K_{34} = K_3 = K_1$

所以 $k_3 = 1.38$

(2) 分配率(μ)与分担率(d)：对节点2,3

$$\mu_{41} = 1.38/(1.38 + 0.90) \approx 0.61$$

$$\mu_{42} = 1.0 - \mu_{41} \approx 0.39$$

$$d_{12} = d_1 = -K_1/(2\sum K_i)$$

$$= -1.38/[2 \times (1.38 + 1.38)]$$

$$= -0.25$$

$$d_2 = -0.25$$

(3) 固定端力矩(FEM)：令节点2,3无转动仅产生移动，与外力 H 平衡，有

$$H = Q_1 + Q_2$$

$$= (M_{12} + M_{21})/h + (M_{34} + M_{43})/h$$

柱的杆端力矩的总和为

$$M_{TL} = M_{12} + M_{21} + M_{34} + M_{43}$$

$$= Hh = 7.2 \times 3.2$$

$$= 23.04 \text{ (t·m)}$$

由此再利用 $FEM = d \cdot M_{TL}$，有

$$FEM = 23.04 \times (-0.25) = -5.76 \text{ (t·m)}$$

下面让我们边参照图5.35边计算以加深理解。完成 FEM 的计算后将在柱头、柱脚上的杆端力矩相加即可得到 M_{TL2}。本问题的杆端力矩为：通过计算各柱的 D_i 得柱头的杆端力矩为3.51(t·m)，由 C_i 的计算得柱脚的杆端力矩为1.76(t·m)，求两根柱的合力矩

$$M_{TL2} = 2 \times (3.51 + 1.76) = 10.54$$

然后反复进行上述计算，在 D_4 结束计算，结果如图5.36所示，它与5.1.3节转角法的例题2结果相同。

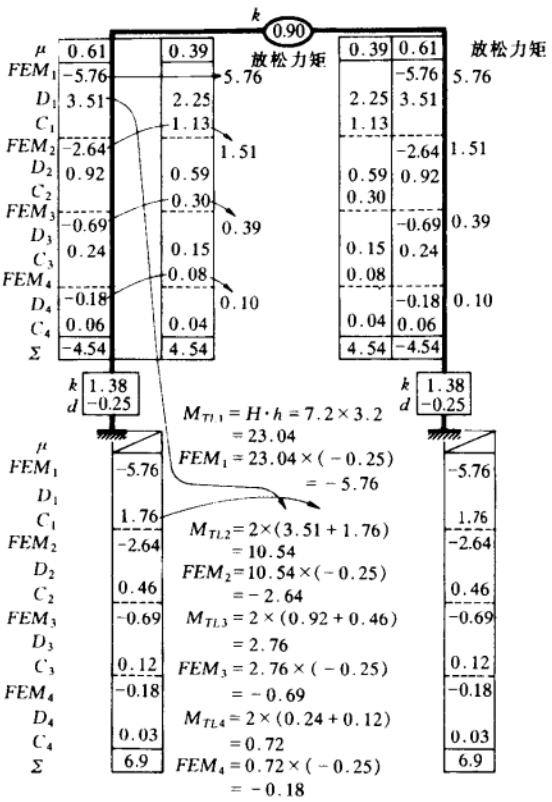


图5.35 例题4的图上计算

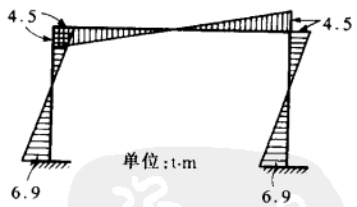


图5.36 例题4的计算结果(当然它与转角法的例题2结果相同)

节点转动约束时的水平位移可由式(5.22)求得。由于在刚臂法中需经过几次这样的约束操作才能求得解，故只要对每次求得的水平位移求和即可。每步的 M_{TL} 除以层高相当于水平外力 H，因此有

$$u = \sum \frac{M_{TL}/h}{12\sum(E_i K_i/h^2)} = \frac{\sum M_{TLi}}{(12E/h)\sum K_i}$$

$$= \frac{(23.04 + 10.54 + 2.76 + 0.72) \times 10^5}{\frac{12 \times 2.1 \times 10^7}{320} \times (1.38 + 1.38) \times 10^3}$$

$$= \frac{37.06}{217.35} = 0.171 \rightarrow 0.17 \text{ (cm)}$$

考察例题4可见有几个地方是可以改进的。第一，当**反对称荷载**[①]作用在对称刚架上时，对左侧、右侧的计算过程是完全相同的，故不必重复计算。第二，从计算过程可看出，约束节点的转动后再令节点移动然后又放松节点，这样使柱的剪力减小，失去力的平衡，然后再令节点移动以保持与外力的平衡，有时必须迭代较多次才能得到近似解（几次给出 *FEM* 正是为此）。为减少迭代次数、加速收敛，是否可令节点的移动稍偏大一些呢。接下来我们来探讨这两点。

[例题 5(A) 级] 考虑利用对称刚架－反对称荷载求解例题4（图 5.37）。

解 当使用刚臂法遇到有不明白的问题时，一个好的方法是回到转角法的基本公式来考虑。当刚架对称而荷载反对称时，若改变荷载的方向，并从该页的背面观察，所产生的位移与内力应与原刚架的结果完全相同。此时刚架中位于对称轴上的点内力为零，该点沿对称轴方向的位移为零。对本例，与对称轴正交的2－3杆件中央点的内力为零，垂直方向的位移为零，它们刚好与该点为可动铰支座时的位移与内力相同。

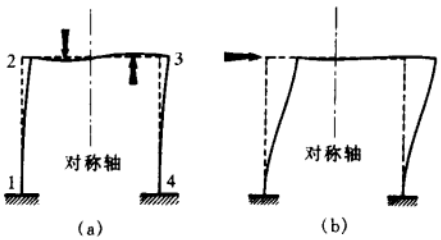


图 5.37 （与例题5有关）将反对称荷载作用在对称刚架上

在刚臂法中计算一端固定的杆件是十分方便的（参照例题3），因此可将2－3杆件置换成一端固定的梁。此时利用杆件两端转角相等的特性（$\theta_i = \theta_j$）（图 5.38），将之代入转角法的基本公式，可得

$$M_{ij} = 2E_{ij}K_{ij}(2\theta_i + \theta_j) \rightarrow (\theta_i = \theta_j) \rightarrow 6E_{ij}K_{ij}\theta_i = 2E_{ij}(3/2)K_{ij}(2\theta_i)$$

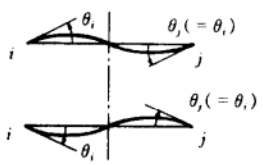


图 5.38 反对称荷载作用在对称刚架上的效果：① 对称轴上的力矩为**零**；② 与对称轴相交的杆件（杆件 ij）的杆端转角相等（$\theta_i = \theta_j$）。利用上述特点可将杆件置换成一端固定的杆件

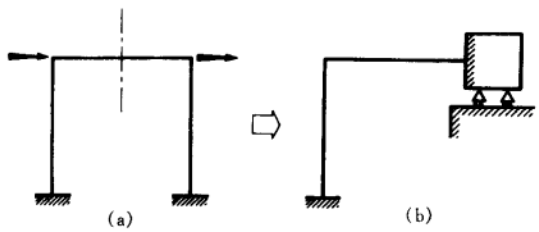
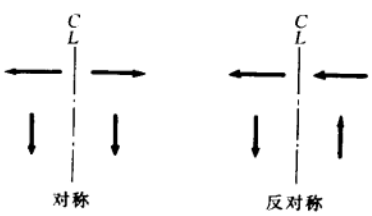


图 5.39 将具有杆件转角 R 的杆件置换成一端固定的杆件，此时的固定端应为“不能转动而能移动”，如图(b)所示

可见，只要将 K_{ij} 乘以置换系数 $3/2(=1.5)$ 即可。只是置换所得的固定端与一般的固定端不同，如图 5.39(b)

① 将图示的结构和荷载沿对称轴折叠后，若左右的结构和荷载图均完全重合则为“对称”。当结构完全重合而荷载的箭头指向相反时则为“反对称”。



所示，其水平方向是可移动的。对本问题只要令

$$K_{23} \to 1.5K_{23}$$

则只需计算对称轴的单侧即可。请参照图 5.40 来跟踪一下计算的过程。值得注意的是，由于只需求解刚架的一半，故最初的荷载也需取为 $H/2(=3.6\ \mathrm{t})$。

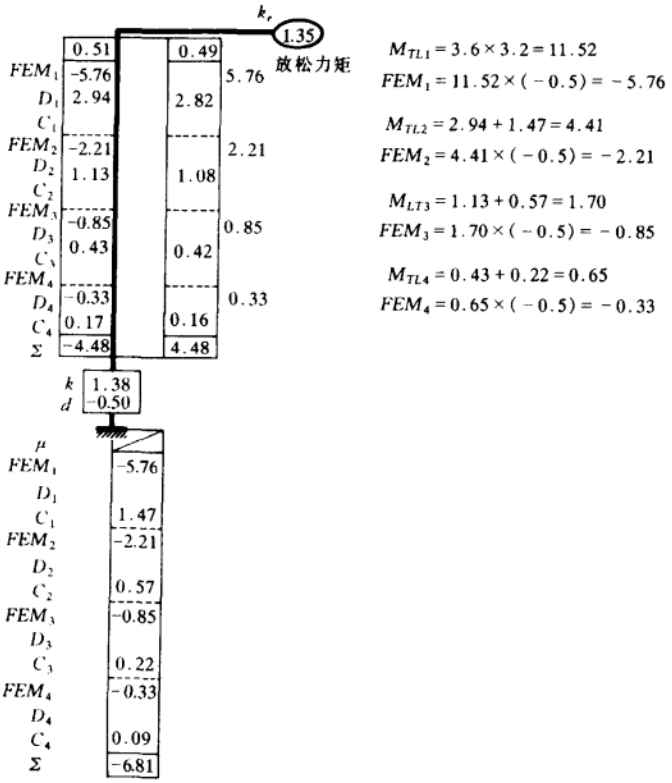


图 5.40 例题 5：利用荷载的反对称性求解与例题 4 相同的问题(图上计算)

对前文中的第二个问题，即改善收敛性的问题，首先来考虑一下为什么收敛不是“很好”的原因。在图 5.41(a) 中用剪力 Q 与移动 $u(=Rh)$ 的关系曲线来表示刚臂法的收敛情况。在放松节点约束的操作 D 中，由于 Q 偏小而需修正。若能如图 5.41(b) 所示，在最初即对 Q 取偏大的值，那么即使放松约束也不致使 Q 与最终值相差太大，即可以改善收敛性。因此，这里将 $M_{TL}(FEM)$ 增大 5 成计算例题 5，如图 5.42 所示，在 D_2 结束计

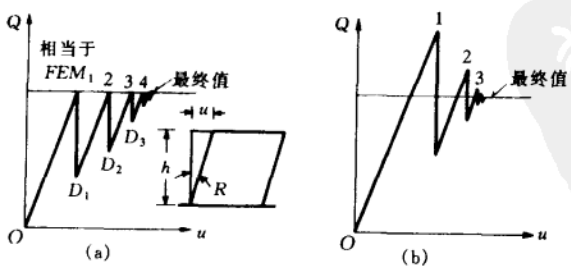
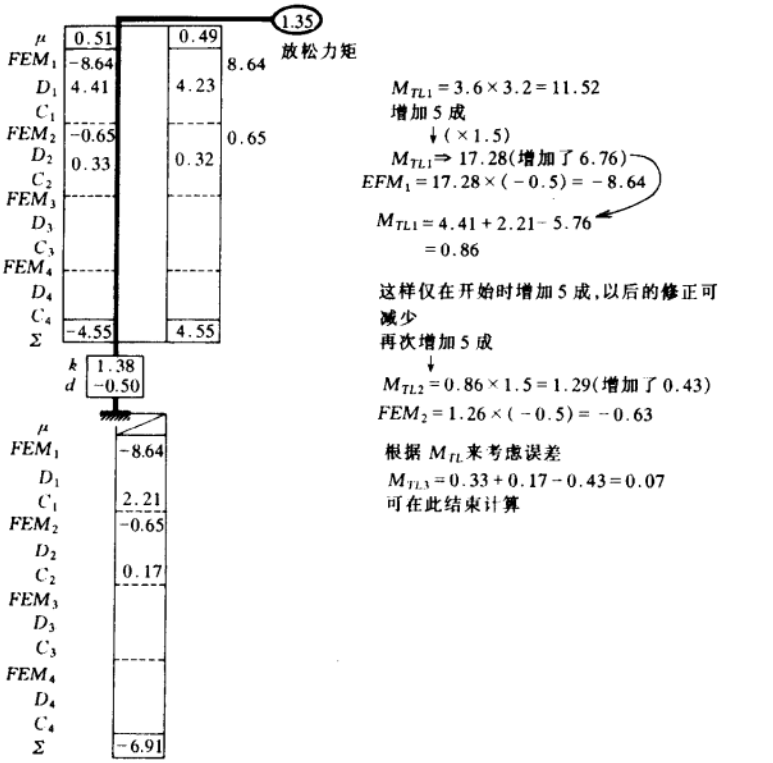


图 5.41 为改善收敛性可适当地放大变形

(a) 过去的方法；(b) 放大变形的方法



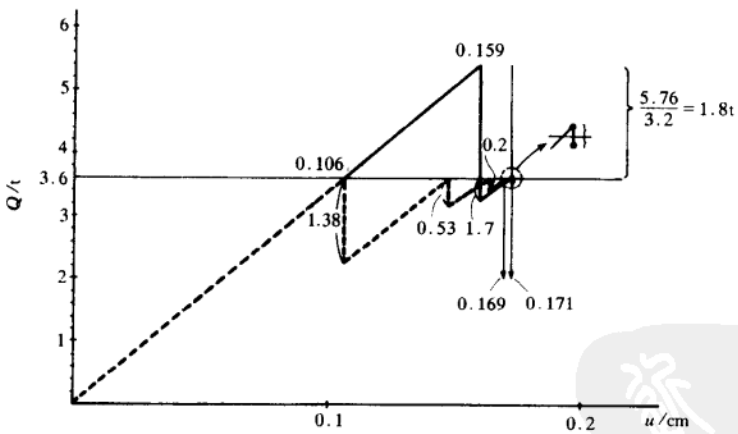


图 5.42 将变形增加 5 成求解例题 5。收敛性有很大的改善。虚线表示图 5.40 的结果

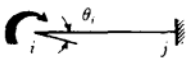
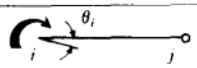
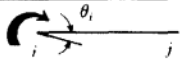
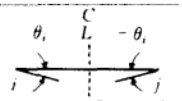
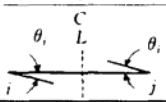
算其误差也不大。

下面为使计算方便，将等价置换的有效刚度比在例题 6 中进行了归纳，至此刚臂法便可告一段落了。不过，对多层刚架的情况和柱脚同时存在铰接和固定的柱等情况尚未求解，建议读者对此求解几个练习题。

[例题 6(A)级] 用一览表表示有效刚度比。

解 设原杆件的刚度比为 k。为将一端铰接的杆件置换成一端固定杆件，可作如下考虑(图 5.43)。

表 5.2 有效刚度

	条件	置换系数	有效刚度*
	一端固定	1	K_{ij}
	一端铰接	3/4	$0.75K_{ij}$
	一端自由	0	0
	对称刚架 对称荷载	0.5	$0.5K_{ij}$
	对称刚架 反对称荷载	1.5	$1.5K_{ij}$

* 将乘以置换系数后的刚度称为有效刚度，有效刚度用标准刚度 K_0 除后所得的比称为有效刚度比

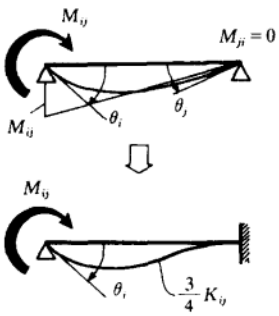


图 5.43 例题 6：置换成等价的一端固定杆件。对一端铰接的杆件，只要将原刚度（K_{ij}）乘以 3/4 即为等价的一端固定杆件

$$M_{ij} = 2E_{ij}K_{ij}(2\theta_i + \theta_j) + C_{ij} \tag{a}$$

$$M_{ji} = 2E_{ij}K_{ij}(\theta_i + 2\theta_j) + C_{ji} = 0 \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)消去 θ_j，有

$$M_{ij} = 2E_{ij}\left(\frac{3}{4}K_{ij}\right)(2\theta_i) + \left(C_{ij} - \frac{C_{ji}}{2}\right)$$

该式表示它与 $K_{ij} \to \frac{3}{4}K_{ij}$ 时的一端固定杆件的公式相同（图 5.43）。此时的荷载项为

$$H_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{ji}}{2} \tag{c}$$

对一端铰接或一端弹性支承的杆件在一端发生转角 θ_j 时，当利用有效刚度比时也必须对荷载项进行修正后才可使用。

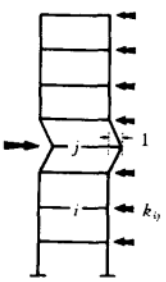


图 5.44 仅使 j 层产生单位位移而需施加在 i 层上的力 k_{ij}

用刚臂法求解各层均发生水平位移的多层框架时，有两种方法。

第一种方法是将我们已学习过的刚臂法（渐近法）直接用于求解多层结构，在保持各层剪力与外力平衡条件下逐层求解各层的位移。该方法可只用计算器而不借助于计算机求解（图 5.45）。

第二种方法是一种折中的方法。如图 5.44 所示，需计算仅使某层（j 层）产生单位位移而需在 i 层施加的力。设将该力表示为 k_{ij}。例如对三层框架，如图 5.46 所示有三组变形与相应的九个力 k_{ij}。

在九个 k_{ij} 中，由于有 $k_{ij} = k_{ji}$ 的关系故实际上只需计算六个 k_{ij}，可利用刚臂法进行计算。如图 5.46(d) 所示，设在力 P_i 作用下产生位移 u_i，将(a)$\times u_1$，(b)$\times u_2$，(c)$\times u_3$ 叠加应为(d)。因此有以下关系存在

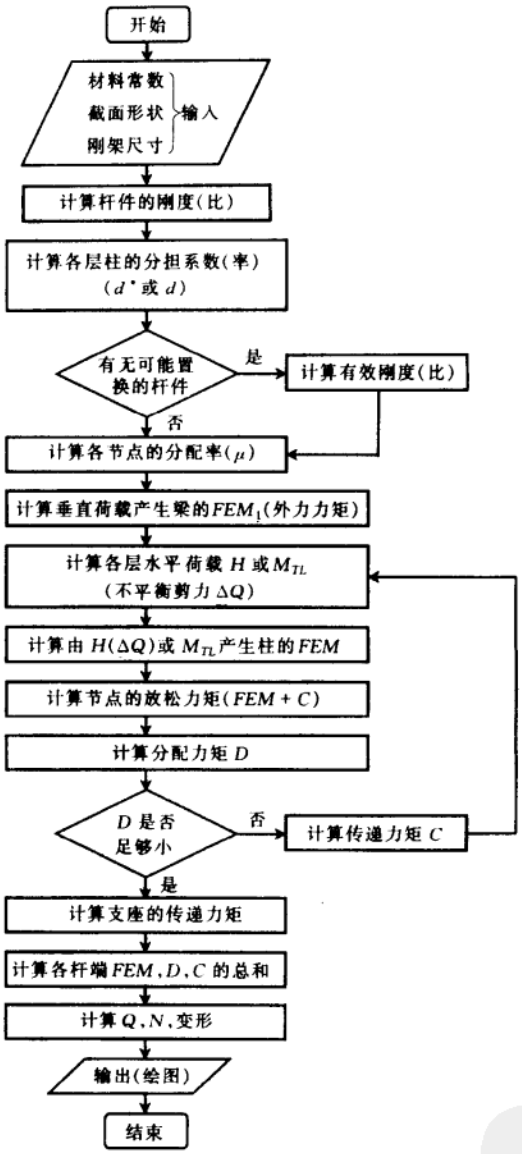


图 5.45 刚臂法中用渐近法分析求解多层结构的变形－内力的流程图

$$\left.\begin{aligned} k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 &= P_1 \\ k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 &= P_2 \\ k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 &= P_3 \end{aligned}\right\}$$

由于 k_{ij} 与 P_i 均为已知量，可求解三元一次联立方程得到 u_i。当将上式写成矩阵形式时为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

可简写为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}$$

此时可由

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{5.30}$$

求得 $\boldsymbol{u}$。

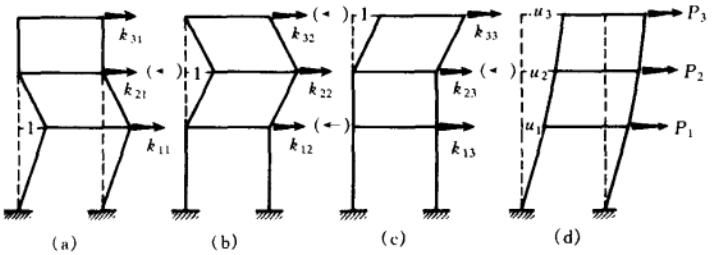


图 5.46 刚臂法中用折中法求解多层结构的原理

(a) × u_1 + (b) × u_2 + (c) × u_3 → (d)

这样利用刚臂法仅是为了计算 k_{ij}，随后便与转角法一样通过联立方程式直接求解，这里假定联立方程式是能够求解的。前面已多次说过，当有时间限制时手算最多只能求解三元联立方程式，因此对四层以上的结构需借助计算机求解。



5.3 矩阵法

矩阵法与转角法类似，它只是将转角法中的未知量(θ,R) 替换为(θ,u,v)[①]。因此，这样就增加了多元联立方程式的未知数，并超过手算的限度。但是对计算机而言，矩阵法是一种简单的方法。这里的矩阵法将会在有限元法中再次出现。矩阵法在理论上可通过基于能量法的有限元法来进行简明的说明，本章将作为转角法的延伸来叙述以便于理解。



5.3.1 矩阵法的基本公式

转角法的基本公式为

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i - R \\ \theta_j - R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ij} \\ C_{ji} \end{bmatrix} \tag{前文 5.8}$$

它是表示杆件的杆端力矩与杆件产生的变形 θ,R 关系的基本公式，是由梁的基本公式 $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2 = M/EI$ 推导出来的。已经指出，由于杆端力矩与杆端弯矩(内力) 保持平衡，故它也表示了内力与变形的关系。

① 这里是指平面刚架，若为空间刚架，则矩阵法中的未知量应为(θ_1,θ_2,θ_3,u,v,w)。

将该式改写成

$$\begin{bmatrix} M_{ij}-C_{ij} \\ M_{ji}-C_{ji} \end{bmatrix} = 2EK \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i - R \\ \theta_j - R \end{bmatrix} \qquad \text{(前文 5.10)}$$

式中的左边为与外力有关的项，右边为与杆件的变形和杆端转角有关的项。它又可改写成以下形式

$$\begin{bmatrix} M_{ij}-C_{ij} \\ M_{ji}-C_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EK & 2EK \\ 2EK & 4EK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i - R \\ \theta_j - R \end{bmatrix} \qquad (5.31)$$

更一般化地可写成

$$\begin{bmatrix} M_{ij}-C_{ij} \\ M_{ji}-C_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta \\ \beta & \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i - R \\ \theta_j - R \end{bmatrix} \qquad (5.32)$$

这样，只要选择与杆端条件相符的 α、β，则对杆件端部任意的连接条件式(5.32)均可适用，与杆端条件无关。表 5.3 表示了杆端条件与 α_i、α_j、β 的关系[①]。

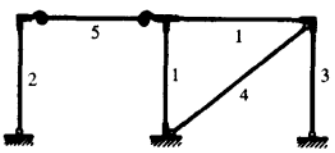


表 5.3 杆端条件与 α、β 的值

	杆端条件	i 端	j 端	α_i	α_j	β
1	两端刚接			$4EI/l$	$4EI/l$	$2EI/l$
2	i 端铰接			0	$3EI/l$	0
3	j 端铰接			$3EI/l$	0	0
4	两端铰接			0	0	0
5	弹性连接			$0 \sim 4EI/l$	$0 \sim 4EI/l$	$0 \sim 2EI/l$

下面研究杆件转角 R 与节点位移 u、v 的关系。为了方便，取杆轴方向为 x 轴，y 轴以垂直向下为正(转动以顺时针方向为正)。由图 5.47(c)所示，设节点 i 在 x、y 方向的位移分别为 u_i、v_i，节点 j 位移为 u_j、v_j，杆件转角 R 为

$$R = \frac{v_j - v_i}{l} \qquad (5.33)$$

式中 l 为杆件的原长度，假定 x 方向的变形 $\Delta l = u_j - u_i$ 不大。另一方面，x 方向的应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{u_j - u_i}{l} \qquad (5.34)$$

将式(5.33)代入式(5.32)，可得到由 u、v 表示的公式。

$$\begin{bmatrix} M_{ij}-C_{ij} \\ M_{ji}-C_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta \\ \beta & \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i - R \\ \theta_j - R \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta \\ \beta & \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/l & 1 & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \qquad (5.35)$$

① 在式(5.31)中引入杆端条件即可推导出表中的系数。

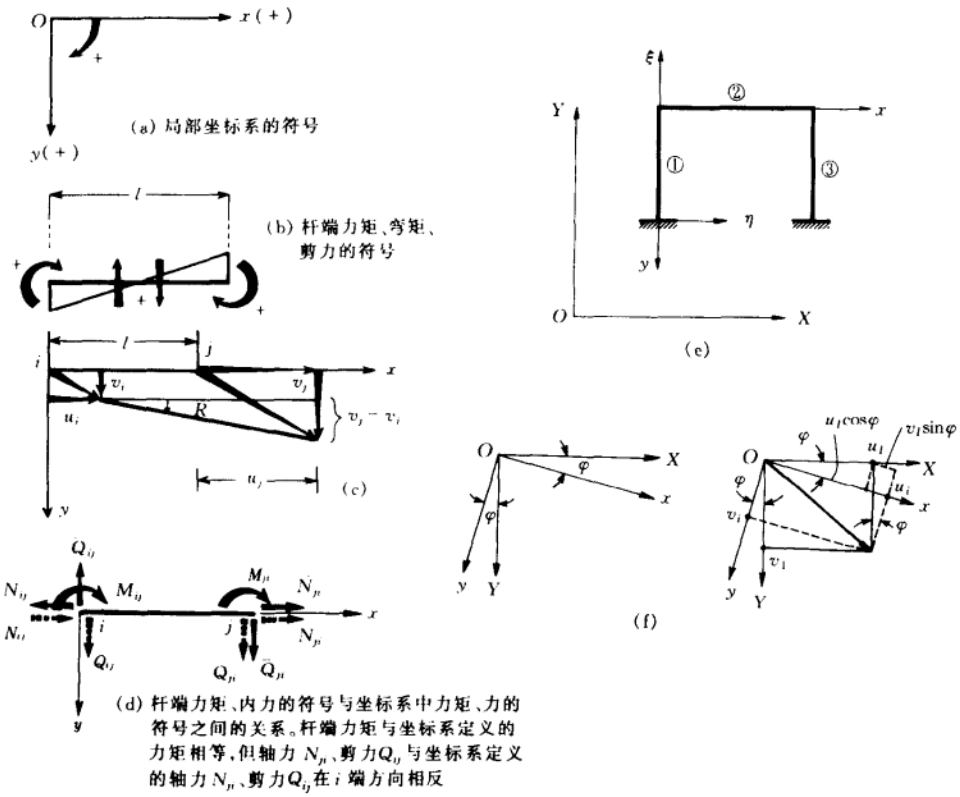


图 5.47 矩阵法基本公式的推导

(a) 局部坐标系的符号；(b) 杆端力矩与弯矩的符号；(c) 位移与杆件转角；(d) 外力与内力(截面力)的符号；(e) 总体坐标系与局部坐标系；(f) 局部坐标系与总体坐标系之间的坐标变换

将表示杆件位移－转角的向量 $\begin{bmatrix} u_i \\ \cdots \\ \theta_j \end{bmatrix}$ 写成 $[u_{ij}]$，当无杆中荷载作用时，有

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/l & 1 & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 1 \end{bmatrix} [u_{ij}] \tag{5.36}$$

将轴力用带杠的记号 $\bar{N}_{ij}$，$\bar{N}_{ji}$ 来表示，根据式(5.34)可得

$$\bar{N}_{ij} = \bar{N}_{ji} = \sigma A = E\varepsilon A = \frac{EA(u_j - u_i)}{l} \tag{5.37}$$

为统一表达形式，也用 u_{ij} 来表达，有

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_{ij} \\ \bar{N}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \end{bmatrix} [u_{ij}] \tag{5.38}$$

在杆件两端产生的剪力也用带杠的记号来表达，可写成 $\bar{Q}_{ij} = \bar{Q}_{ji} = -\dfrac{M_{ij} + M_{ji}}{l}$ 的形式，用式(5.36)来表示，有

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{ij} \\ \bar{Q}_{ji} \end{bmatrix} = -\frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\alpha_i+\alpha_j+2\beta}{l^2} & -\dfrac{\alpha_i+\beta}{l} & 0 & \dfrac{\alpha_i+\alpha_j+2\beta}{l^2} & -\dfrac{\alpha_j+\beta}{l} \\ 0 & -\dfrac{\alpha_i+\alpha_j+2\beta}{l^2} & -\dfrac{\alpha_i+\beta}{l} & 0 & \dfrac{\alpha_i+\alpha_j+2\beta}{l^2} & -\dfrac{\alpha_j+\beta}{l} \end{bmatrix} [u_{ij}] \tag{5.39}$$

由于系数相当烦琐，进行如下的置换，将杆端的内力与位移的关系归纳起来书写。

$$EA/l = \gamma$$
$$(\alpha_i+\beta)/l = \eta_i$$
$$(\alpha_j+\beta)/l = \eta_j$$
$$(\alpha_i+\alpha_j+2\beta)/l^2 = \eta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_{ij} \\ \bar{Q}_{ij} \\ M_{ij} \\ \bar{N}_{ji} \\ \bar{Q}_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -\gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{ij} & -\eta_i & 0 & \eta_{ij} & -\eta_j \\ 0 & \eta_i & \alpha_i & 0 & -\eta_i & \beta \\ \hdashline -\gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{ij} & -\eta_j & 0 & \eta_{ij} & -\eta_j \\ 0 & \eta_j & \beta & 0 & -\eta_j & \alpha_j \end{array}\right] [u_{ij}] \tag{5.40}$$

仔细观察上式，可发现与$[u_{ij}]$相乘的矩阵有错误。$[u_{ij}]$是位移向量，而N_{ij}，Q_{ij}，M_{ij}，… 等为杆端内力，因此与$[u_{ij}]$相乘的矩阵应为刚度矩阵，相当于 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Ku}$ 中 $\boldsymbol{K}$ 的。而刚度矩阵 K 应是对称的，但上式的矩阵却并不对称。实际上这是由于公式将内力与外力混同使用而引起的结果。比较内力、外力的正负，如图 5.47(d) 所示，N_{ij}，Q_{ij} 的符号是相反的。因此当取左边为杆端外力时，它与内力系统之间需作下述的符号变换

外力系统　　变换矩阵　　内力系统

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ Q_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ Q_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hdashline & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{N}_{ij} \\ \bar{Q}_{ij} \\ M_{ij} \\ \bar{N}_{ji} \\ \bar{Q}_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix}$$

对角线以外为 0

将式(5.40)代入上式，结果可得杆端力与位移的关系

外力系

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ Q_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ Q_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \gamma & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{ij} & \eta_i & 0 & -\eta_{ij} & \eta_j \\ 0 & \eta_i & \alpha_i & 0 & -\eta_i & \beta \\ \hdashline -\gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{ij} & -\eta_i & 0 & \eta_{ij} & -\eta_j \\ 0 & \eta_j & \beta & 0 & -\eta_j & \alpha_j \end{array}\right] [u_{ij}] \tag{5.41}$$

当杆中有荷载作用时，必须考虑荷载的影响。由于矩阵法是用各节点的位移和与此对应的杆端力来表示结构受力变形的关系，因此必须将杆中荷载的影响也置换成等价的节点力来考虑。即

1. 将杆件两端固定，求出杆端反力。

2. 将与固定端反力大小相等、方向相反的力作为杆端外力作用在杆件的端部（图 5.48(c)）。

当有杆中荷载作用时杆端力与位移的关系为

外力系

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ Q_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ Q_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \gamma & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{ij} & \eta_i & 0 & -\eta_{ij} & \eta_j \\ 0 & \eta_i & \alpha_i & 0 & -\eta_i & \beta \\ \hdashline -\gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{ij} & -\eta_i & 0 & \eta_{ij} & -\eta_j \\ 0 & \eta_j & \beta & 0 & -\eta_j & \alpha_j \end{array}\right] [u_{ij}] - \begin{bmatrix} N_i \\ R_i \\ -C_{ij} \\ N_j \\ R_j \\ -C_{ji} \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

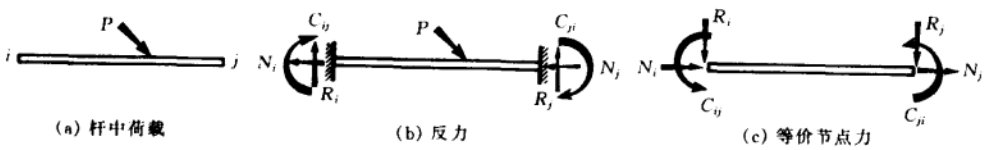
式中，N_i，R_i，C_{ij} 为作用在 i 端的等价节点力

$$R_i = Q_i - (C_{ij} + C_{ji})/l, R_j = -Q_j - (C_{ij} + C_{ji})/l$$

而 Q_i，Q_j 为杆中荷载在简支梁 i 端和 j 端产生的剪力。将式(5.42)简化，可写成

$$[P_{ij}] = [K_{ij}][u_{ij}] + [I_{ij}] \tag{5.43}$$

实际上，式(5.43)是无法使用的。这是由于坐标轴是以杆轴方向为基准而设定的，例如该式对刚架的梁是适用的，对柱就不适用（参照图 5.47(e)）。将这种按杆件单元分别选取的坐标系（(x,y) 或(1,2)）称为**局部坐标系**[1]。



(a) 杆中荷载　(b) 反力　(c) 等价节点力

图 5.48　用等价节点力来表示杆中荷载的影响

与此相对应的，将一个结构唯一确定的坐标系（(X,Y) 或(Ⅰ，Ⅱ)）称为**总体坐标系**。由于式(5.43)是在局部坐标系中的表达式，只要将之变换到总体坐标系即可。实际上如前文所述，矩阵法计算的优点之一就是坐标变换十分方便。

一般在局部坐标系（(x,y) 系）中表示为 $[u_{ij}]$，$[P_{ij}]$ 的向量，在总体坐标系（(X,Y) 系）中表示为 $[u_{IJ}]$，$[P_{IJ}]$[2]，两者有下列关系

局部坐标系　总体坐标系

$$\begin{aligned} [u_{ij}] &= \boldsymbol{T}[u_{IJ}] \\ [P_{ij}] &= \boldsymbol{T}[P_{IJ}] \end{aligned} \tag{5.44}$$

[1] 局部坐标系也称为单元坐标系，杆件坐标系，它们均是从 Local coordinates 翻译过来的。

[2] 注意脚标字母大小写的区别，i，j 表示在 (x,y) 系的取值，I，J 表示在 (X,Y) 系的取值。

此时式(5.43)可改写成

$$\boldsymbol{T}[P_{IJ}]=[K_{ij}]\boldsymbol{T}[u_{IJ}]+[L_{ij}]$$

将上式的两边乘以 $\boldsymbol{T}^{-1}$，有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}[P_{IJ}]=\boldsymbol{T}^{-1}[K_{ij}]\boldsymbol{T}[u_{IJ}]+\boldsymbol{T}^{-1}[L_{ij}] \tag{5.45}$$

这里

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}[P_{IJ}]=\boldsymbol{I}[P_{IJ}]=[P_{IJ}]$$

同时，当(x,y)系与(X,Y)系均为正交坐标系时，坐标变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵，即

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$$

式(5.45)变为

$$[P_{IJ}]=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}[K_{ij}]\boldsymbol{T}[u_{IJ}]+\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}[L_{ij}] \tag{5.46}$$

式(5.46)表明，完成局部坐标系((x,y)系)中$[K_{ij}]$的计算后，利用 $\boldsymbol{T}$ 进行以下计算

$$[K_{IJ}]=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}[K_{ij}]\boldsymbol{T} \tag{5.47}$$

便可求得总体坐标系中的刚度$[K_{IJ}]$。同时计算(x,y)系中的$[L_{ij}]$，再通过变换

$$[L_{IJ}]=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}[L_{ij}] \tag{5.48}$$

求得总体坐标系中的$[L_{IJ}]$，因此式(5.46)可写成以下形式

$$[P_{IJ}]=[K_{IJ}][u_{IJ}]+[L_{IJ}] \tag{5.49}$$

当 x 轴与 X 轴倾角为 φ 时，坐标变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}T_1 & 0\\ \cdots & \cdots\\ 0 & T_1\end{bmatrix}\quad \text{其中}[T_1]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.50}$$

这可由图 5.47(f)求出，即

$$\begin{aligned}u_i&=(\cos\varphi\quad \sin\varphi)\begin{bmatrix}u_I\\ v_I\end{bmatrix}\\ v_i&=(-\sin\varphi\quad \cos\varphi)\begin{bmatrix}u_I\\ v_I\end{bmatrix}\end{aligned}\Rightarrow\begin{bmatrix}u_i\\ v_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_I\\ v_I\end{bmatrix} \tag{5.51}$$

另一方面，节点的转角 θ_i 在坐标变换后其值不变，即有关系

$$\theta_i=\theta_I$$

因此最后可归纳为

$$\begin{bmatrix}u_i\\ v_i\\ \theta_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_I\\ v_I\\ \theta_I\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}u_i\\ v_i\\ \theta_i\end{bmatrix}=[T_1]\begin{bmatrix}u_I\\ v_I\\ \theta_I\end{bmatrix}$$

同样地可得

$$\begin{bmatrix}u_j\\ v_j\\ \theta_j\end{bmatrix}=[T_1]\begin{bmatrix}u_J\\ v_J\\ \theta_J\end{bmatrix}$$

利用式(5.50)算出式(5.47)的矩阵积，结果即为总体坐标系中杆件的刚度矩阵，表达如下

$$[K_{IJ}]=\begin{bmatrix}
\frac{\gamma X^2+\eta_i Y^2}{l^2} & \frac{\gamma XY-\eta_i XY}{l^2} & -\frac{\eta_i Y}{l} & -\frac{(\gamma X^2+\eta_j Y^2)}{l^2} & \frac{-\gamma XY+\eta_j XY}{l^2} & -\frac{\eta_j Y}{l} \\
 & \frac{\gamma Y^2+\eta_i X^2}{l^2} & \frac{\eta_i X}{l} & \frac{-\gamma XY+\eta_j XY}{l^2} & -\frac{(\gamma Y^2+\eta_j X^2)}{l^2} & \frac{\eta_j X}{l} \\
 & & \alpha_i & \frac{\eta_i Y}{l} & \frac{-\eta_i X}{l} & \beta \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
 & & & \frac{\gamma X^2+\eta_j Y^2}{l^2} & \frac{\gamma XY-\eta_j XY}{l^2} & \frac{\eta_j Y}{l} \\
 & \text{对称} & & & \frac{\gamma Y^2+\eta_j X^2}{l^2} & -\frac{\eta_j X}{l} \\
 & & & & & \alpha_j
\end{bmatrix} \tag{5.52}$$

式中，$X=l\cos\varphi$，$Y=l\sin\varphi$。同样地式(5.48)变为

$$[L_{IJ}]=\begin{bmatrix}
-\frac{N_i X-Q_i Y}{l}-\frac{C_{ij}+C_{ji}}{l^2}Y \\
-\frac{N_i Y+Q_i Y}{l}+\frac{C_{ij}+C_{ji}}{l^2}X \\
C_{ij} \\
-\frac{N_j X+Q_j Y}{l}-\frac{C_{ij}+C_{ji}}{l^2}Y \\
-\frac{N_j Y-Q_j X}{l}+\frac{C_{ij}+C_{ji}}{l^2}X \\
C_{ji}
\end{bmatrix} \tag{5.53}$$



5.3.2 组建结构的总体刚度矩阵[①]

至此已求得了总体坐标系中各杆件的杆端力$[P_{IJ}]$、杆中荷载$[L_{IJ}]$和位移$[u_{IJ}]$之间的关系。下一步是通过各杆件的关系式来组建刚架总体的力与位移关系式。本方法将在有限元法中再次遇到，不过在本章中可较容易地掌握。

为便于理解，引用图5.49的简单刚架进行说明。节点数共计4个，由于每个节点有3个位移(u,v,θ)，故位移总计有$3\times4=12$个。由于u_1,v_1,θ_1为零(固定支承)、u_4,v_4为零(铰支承)，故未知数变为7个，记为$u_2,v_2,\theta_2,u_3,v_3,\theta_3,\theta_4$，用$\boldsymbol{u}$表示。只是在用计算机计算时，最初仍需就12个未知数建立公式。

如图5.50所示，为组建12×12的总体刚度矩阵$\boldsymbol{K}$，在纸上留出空间(为避免混乱，暂时考虑没有杆中荷载的情况，即$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{0}$的情况)。首先将杆件1(1—2杆件、柱)的刚度$[K_{1\,\mathrm{II}}]$组装到总体刚度矩阵$\boldsymbol{K}$中。在图5.50中表示出各杆件名及其应组装的领域(杆件4未记入)。组装的方法是，首先令$\boldsymbol{K}$的所有单元为零，当同一位置($\boldsymbol{K}$的同一单元)有几个杆件的刚度叠合时，可简

① 参照4.1.2节例题3。

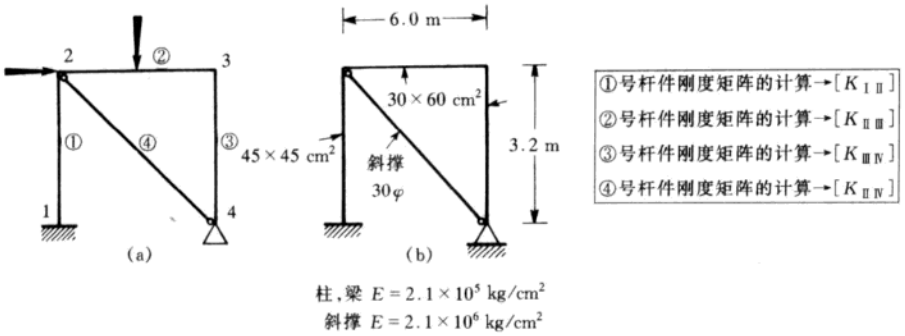


图 5.49　矩阵法分析刚架的顺序(其 1)

(a) 对节点、杆件编号;(b) 计算杆件的刚度,根据杆端条件确定 α,β;

(c) 根据式(5.52)计算各杆件的刚度矩阵;

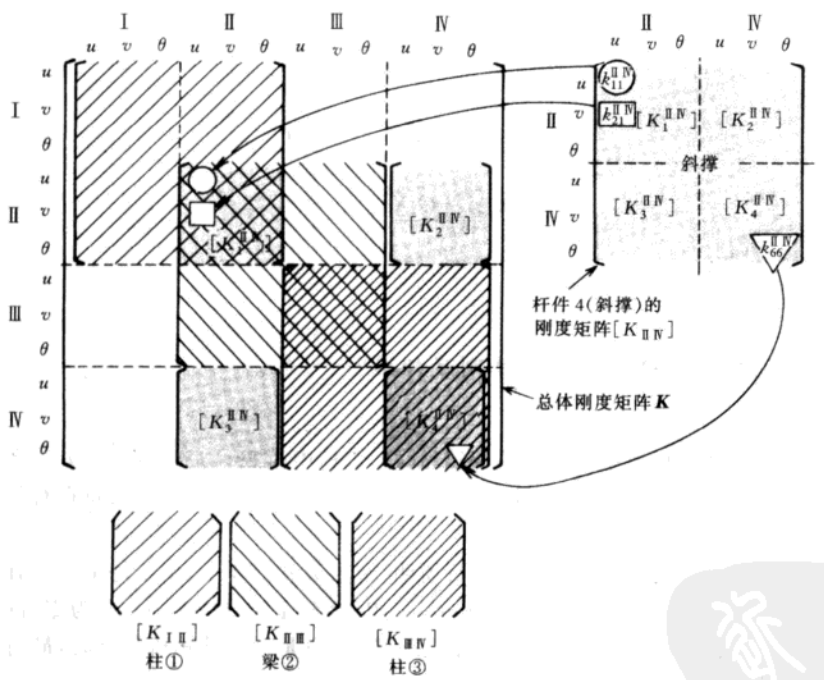


图 5.50　矩阵法分析刚架的顺序(其 2)

(d) 利用杆件的刚度矩阵[$K_{\mathrm{I\,II}}$],[$K_{\mathrm{II\,III}}$],[$K_{\mathrm{III\,IV}}$],[$K_{\mathrm{II\,IV}}$]组建总体刚度矩阵;

(e) 对 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ 求解 $\boldsymbol{u}$;

(f) 根据 $\boldsymbol{u}$ 与杆件的刚度矩阵[$K_{\mathrm{I\,II}}$]等求出杆端外力,并由此求得杆端的内力。

单地求其代数和。

例如杆件4(2－4杆件、斜撑)的刚度矩阵为$[K_{\text{Ⅱ Ⅳ}}]$,其第1行第1列的元素$k_{11}^{\text{Ⅱ Ⅳ}}$表示当节点2在X方向移动单位长度(1 cm)时,在节点2X方向上应施加的杆端力。当时$u_2=1$,由于该杆件(斜撑)是组合在刚架中的,它本身承受的杆端力相当于$k_{11}^{\text{Ⅱ Ⅳ}}$。因此,在叠加杆件1(柱)、杆件2(梁)等的刚度后形成的k_{11}中再加上$k_{11}^{\text{Ⅱ Ⅳ}}$,这表示当产生位移u_2时已考虑了斜撑的贡献。

组合成$\boldsymbol{K}$后,由于节点外力项$\boldsymbol{P}$和杆中荷载项$\boldsymbol{L}$一般是作为荷载条件给定的,故可得到以下形式的多元联立方程式

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \tag{5.54}$$

求解方程可得到位移$\boldsymbol{u}$,将所得的$\boldsymbol{u}$与各杆件的刚度矩阵相乘便可得到内力。

至此,用矩阵法求解位移和内力过程的说明已结束,可将之归纳成如图5.51所示的计算流程图,并给出用计算机分析的实例(图5.52)。

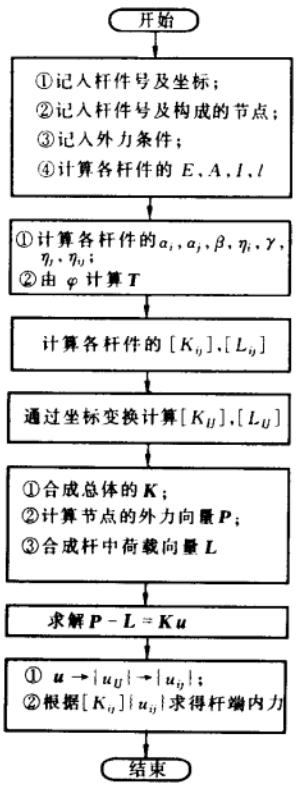
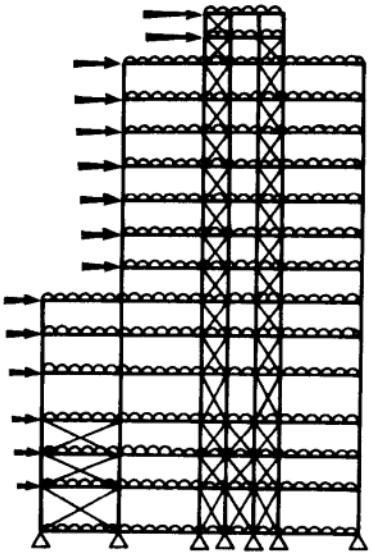
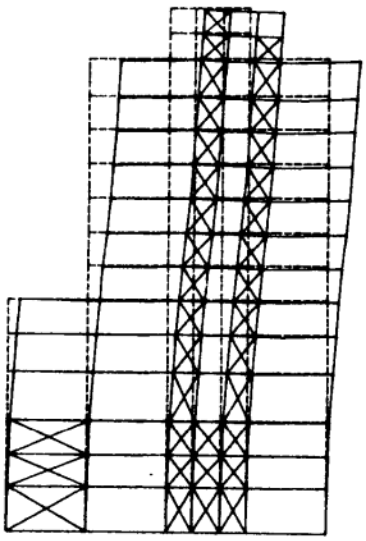


图5.51 用矩阵法分析求解结构位移－内力的流程图

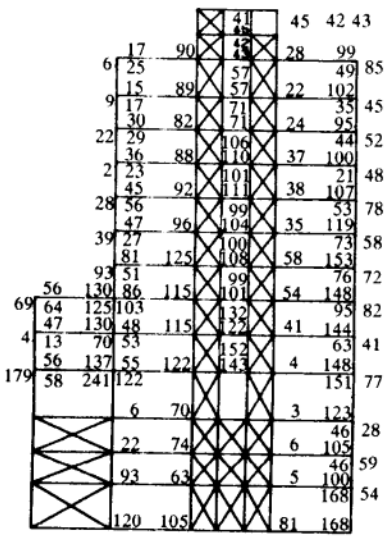


(a) 荷载状态



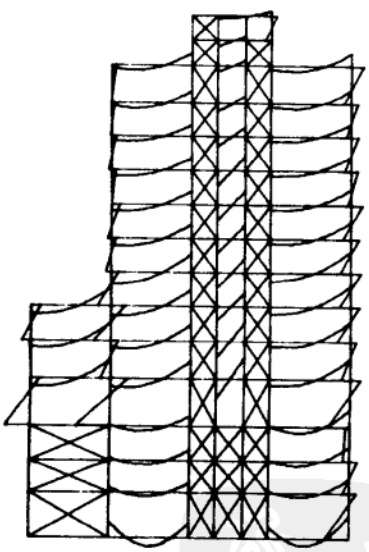
LIME X - 05 DMX - 15.08956

(b) 位移图



LINE X - 05 NOMENT 240.6

(c) 柱 - 梁端的弯矩



LINE X - 05 NOMENT 240.6

(d) 弯矩图(不包括墙的部分)

图 5.52 用矩阵法求解结构的分析实例(使用计算机)



5.4 转角法、刚臂法、矩阵法的总结

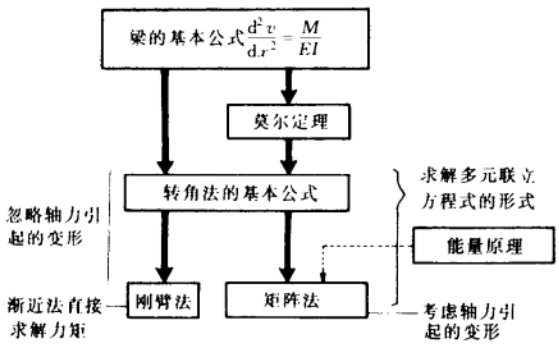


图 5.53 转角法、刚臂法、矩阵法均是从梁的基本公式 $d^2v/dx^2 = M/EI$ 推导出来的

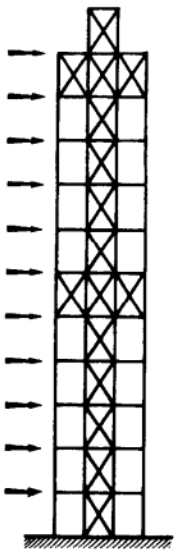


图 5.54 在求解细长建筑物时不使用矩阵法，误差将很大（由于转角法、刚臂法中忽略了柱由于轴力引起的伸缩）

如图 5.53 所示，这些方法均是从梁的基本公式出发的，尽管各个方法在使用基本公式时可能会改变基本公式的形式，但推导梁的基本公式时所使用的前提条件（$dv/dx \ll 1$，平面假设，截面形状不变）仍保持不变。由于转角法、刚臂法忽略了轴力引起的杆件轴向伸缩变形，在对图 5.54 所示在水平力作用下的细长建筑物分析时，由于误差太大故不能使用。而矩阵法，由于在变形的计算中包含了轴向伸缩变形，故不必担心误差问题。而且，转角法和矩阵法在不使用计算机时不适于求解节点多的刚架。在手算的条件下且未知数不超过 4 个时应选择刚臂法。



5.5 截面内的应力

将细长的杆件作为线材建立模型时，认为在截面上产生的内力包括：轴力（N）、剪力（Q）、弯矩（M）。在 4.3 节中推导梁的基本公式时，曾研究过以下问题，即截面内的应力分布。对产生弯矩的杆件当平面假设成立时，距离中性轴 y 处点的应力分布为（图 5.55）。

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I}y \qquad \text{（前文 4.22）}$$

（一般不加负号（−），以下省略）

此时，应力的最大值发生在距离中性轴最远的点（即 y 最大的点）、即杆件的边缘处

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{I}y_{\max}=\frac{M}{Z}\qquad \text{其中 } Z=\frac{I}{y_{\max}}\text{①}$$

(前文 4.20)

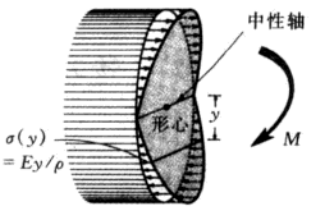


图 5.55　$\sigma(y)=(-)My/I$

由于材料的破坏发生在应力最大的地方，因此在弯矩作用下必须根据上式计算 $\sigma_{\max}$ 并检验它是否处于材料容许的范围内，即

$$\sigma_{\max}\leqslant f_{\text{adm}}\qquad (5.55)\text{②}$$

它是结构设计时的重要条件之一。

可按上述方法求得在弯矩(M)作用下产生的最大应力 $\sigma_{\max}$，但剪应力的最大值又如何求得。现在来考虑截面内的剪应力分布。



5.5.1　剪应力的分布：$\tau=QS/bI$

不少结构工程师能记住 $\sigma=My/I$，但能理解并记住 $\tau=QS/(bI)$ 却不多。这里使用的各符号意义为 Q：剪力(t，kgf，N)；b：截面宽度(cm，m)；I：截面二次矩(cm^4，m^4)；S：从截面边缘到计算 τ 部分的截面一次矩(cm^3，m^3)。在推导该式前，先来观察一下实际发生的现象。图 5.56 是为我们所熟悉、受均布荷载作用的简支梁的 Q，M，v 图。

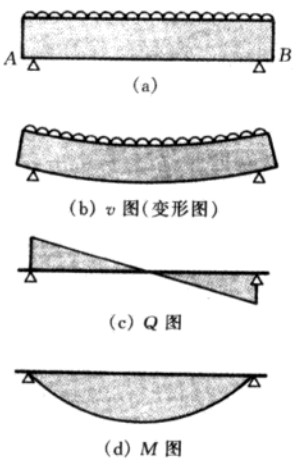


图 5.56　受均布荷载 w 作用简支梁的 Q，M，v 图

如图 5.56 所示杆件 AB 是由匀质杆件构成的，图 5.56(b) 显示其总体变形为上部压缩下部拉伸。图 5.57(a)，杆件 AB 是由外形相同的层状材料组成且彼此并不连接，在荷载作用下将产生图5.57(b) 所示的层间错位，同时挠度也增大。若如图 5.57(c) 所示，在交界面涂上粘结剂或用钉子或螺栓连接不让其滑动，情况则如图 5.57(d) 所示。此时，与图 5.57(b) 不同的是用粘结剂阻止了层间的错位，粘结剂、钉子、螺栓等抵抗了使层间产生错位的力 —— 剪应力。对杆件 AB 那样的匀质杆件，若想象它是由层状板组成，则在其内部会产生剪应力，而该剪应力引起的错位被杆件材料本身所阻止。

下面的问题是该剪应力有多大。从杆件切出厚度为 dx 部分进行考察(图 5.58)，将切出部分的面命名为 ① 面和 ② 面。将该切片沿距离中性面 y_1 的面(③ 面) 切开得到小片(图 5.58(c))，建立该小片的力平衡关系式

$$\int_{y_1}^{y_2}\sigma_{②}(y)\mathrm{d}A-\int_{y_1}^{y_2}\sigma_{①}(y)\mathrm{d}A-\tau\mathrm{d}xb(y_1)=0$$

根据式(4.22)，有

① 若截面关于中性轴对称，则 $y_{\max}=h/2$ 即 $Z=2I/h$。

② f_{adm} 表示容许应力，也可写成 f_{alw}。adm 是 admissible(可容许的)的缩写，alw 是 allowable(可容许的)的缩写。

$$-\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{M+\mathrm{d}M}{I}\right)yb(y)\mathrm{d}y+\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{M}{I}\right)yb(y)\mathrm{d}y$$
$$=\tau\mathrm{d}xb(y_1)$$

将两边除以 $\mathrm{d}x\cdot b(y_1)$ 并整理后有

$$\tau=\frac{-1}{b(y_1)I}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}yb(y)\mathrm{d}y$$

在上式中代入

$$Q=-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\qquad\text{(前文 4.11)}$$

可得

$$\tau=\frac{Q}{b(y_1)I}\int_{y_1}^{y_2}yb(y)\mathrm{d}y=\frac{QS(y_1)}{b(y_1)I}$$

$$\text{其中 } S(y_1)=\int_{y_1}^{y_2}yb(y)\mathrm{d}y\qquad(5.56)$$

式中 S 如图 5.58(b) 所示，为从距离中性轴 y_1 处到截面边缘(距离中性轴 y_2) 之间的微元 $\mathrm{d}A(=b(y)\mathrm{d}y)$ 与臂长 y 之积 $y\mathrm{d}A$ 的求和。若对该截面积分则为

$$S_0=\int_{y_0}^{y_2}yb(y)\mathrm{d}y$$

这就是截面的一次矩，除以截面积 A 后即得形心的位置(S_0/A)。由于这里取 x 轴为中性轴且中性轴通过形心，故 $S_0=0$，因此形心位置也为零。至此，$\tau=QS/bI$ 的证明已完成。但仅此还不够，在求解完例题 2 后，对钢结构等比较薄的截面杆(薄壁截面杆) 中存在的重要问题“剪切中心”进行说明。

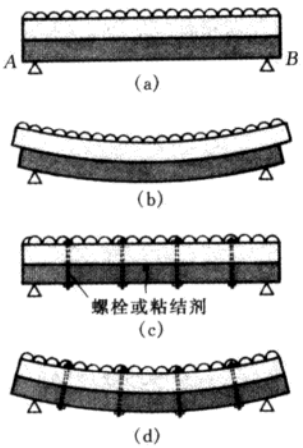


图 5.57 对层间不连接的双层梁施加荷载后产生层间错位。这表示梁中产生了使梁发生错位的剪应力

可将在图 5.58 中 y 面(③面) 沿 x 方向的剪应力写为 τ_{xy}(参照图 3.54)。它与 x 面(①，②面) 沿 y 方向的剪应力(即截面内的剪应力)τ_{yx} 大小相等(一般有 $\tau_{ij}=\tau_{ji}$)。这是很重要的性质。

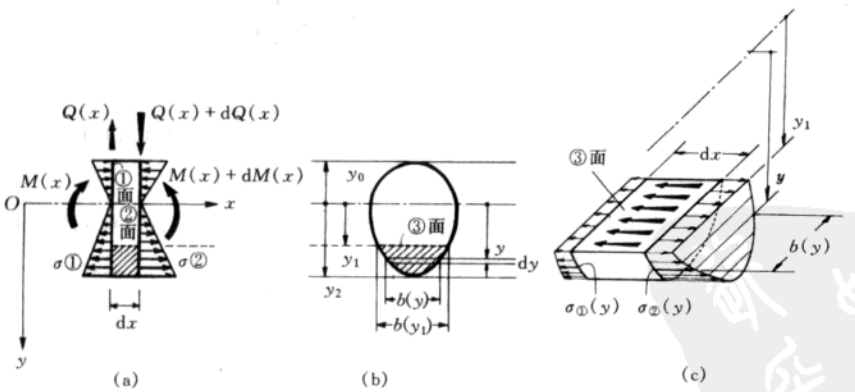


图 5.58 切出微元研究引起错位的应力和剪应力的分布

[例题 1(A 级)] 当长方形截面、工字形截面的梁中有剪力存在时，求剪应力 τ 的分布。

解 为表示杆件的截面，常使用以下的记叙方法

长方形　$b\times h$

工字形　$h\times b\times t_1\times t_2\rightarrow 700\ \text{mm}\times 300\ \text{mm}\times 13\ \text{mm}\times 24\ \text{mm}$，按梁高、梁宽、腹板厚、翼缘厚的顺序书写。

(1) 长方形截面

$$b(y_1)=b$$

$$I=bh^3/12$$

$$S(y_1)=\int_{y_1}^{h/2}b\cdot y\mathrm{d}y=b\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{h/2}=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right)\tag{a}$$

因此有

$$\tau=\frac{QS(y_1)}{b(y_1)I}=\frac{12bQ}{2b^2h^3}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right)$$

$$=\frac{6Q}{A}\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{y_1}{h}\right)^2\right\}\tag{b}$$

$$=6\tau_0\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{y_1}{h}\right)^2\right\}\tag{c}$$

式中，$A=bh$(截面积)，$\tau_0=\dfrac{Q}{A}$(平均剪应力)。

由式(c)可知，剪应力在 $y_1=0$(中性轴位置)处最大，在 $y=\pm h/2$(边缘)处为零，呈抛物线分布。最大值为

$$\tau_{\max}=\tau_{(y_1=0)}=\frac{6}{4}\tau_0=1.5\tau_0$$

为平均剪应力 τ_0 的 1.5 倍。

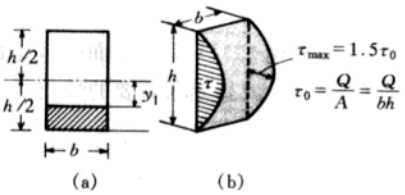


图 5.59　例题 1：(1) 长方形截面梁的剪应力分布

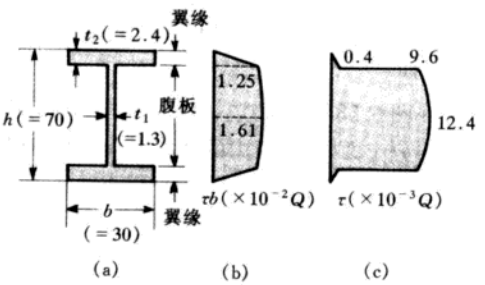


图 5.60　例题 1：(2) 工字形截面梁的剪应力分布

(2) 工字形截面

若求一般公式，结果十分复杂，所以这里对具体的截面求解(图 5.60(a))。在钢结构中常使用工字形截面，此时使用的杆件截面尺寸用 mm 来记叙，而在建筑结构计算中常使用 cm。

$$I=\frac{1}{12}\{(30)\times(70)^3-(30-1.3)\times(70-2\times2.4)^3\}$$

$$\approx 1.946\times10^5(\text{cm}^4)\rightarrow 1.94\times10^5(\text{cm}^4)$$

$$S(y_1)=\int_{y_1}^{h/2}b(y)y\mathrm{d}y$$

试求 $|y_1|\geqslant(35-2.4)$，即翼缘处的 τ，直接利用式(a)有

$$S(y_1)=\frac{30}{2}\left(\frac{70^2}{4}-y_1^2\right)$$

因此在 $y_1=(35-2.4)=32.6$ 处，$S_{(y_1=32.6)}\approx 2.43\times10^3$。故有

$$\tau(y_1)=\frac{S(y_1)}{I}Q=\frac{2.43\times10^{3}}{1.94\times10^{5}}Q=1.25Q\times10^{-2}$$

$$\tau=\frac{1.25}{30}Q\times10^{-2}=0.417Q\times10^{-3}$$

而在 $|y_1|\leqslant(35-2.4)$、即腹板处有

$$S(y_1)=2.43\times10^{3}+\frac{1.3}{2}[(32.6)^2-y_1^2]$$

例如在 $y_1=0$ 在(中性轴位置)处，$S(y_1)=3.12\times10^{3}(\mathrm{cm}^3)$，故有

$$\tau(y_1)=\frac{3.12\times10^{3}}{1.94\times10^{5}}Q=1.61Q\times10^{-2}$$

所以

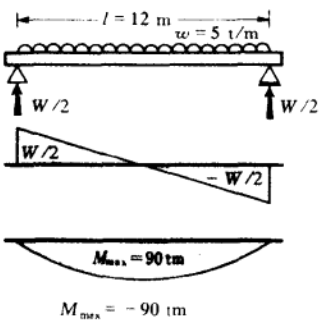
$$\tau=\frac{1.61}{1.3}Q\times10^{-2}\approx1.24Q\times10^{-2}$$

$\tau(y_1)$ 与 τ 如图 5.60(b)、(c) 所示。由图可见，对工字形截面，剪应力几乎均由腹板承担。将 Q 除以腹板面积 (A_w) 后，有

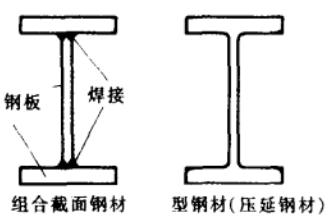
$$\frac{Q}{A_w}=\frac{Q}{(70-2.4\times2)\times1.3}\approx1.18Q\times10^{-2}\approx\tau_{(y_1=0)}$$

大致上可以说，腹板的剪应力可由剪力 Q 除以腹板面积 A_w 来求得。

[例题 2(A 级)] 求在均布荷载 $w=5$ t/m 作用下，跨度为 12 m、工字形截面尺寸为 700 mm × 300 mm × 13 mm × 24 mm 的简支梁最大应力(σ_{max}、τ_{max})。



(a) 受均布荷载作用的钢梁



(b) 组合截面钢材与型钢材

图 5.61 例题 2：求工字形截面梁内的最大应力

解

$$M_{max}=\frac{wl^2}{8}=90\ (\mathrm{t\cdot m});\ Q_{max}=\frac{wl}{2}=30\ (\mathrm{t})$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{I}y_{max}=\frac{90\times10^{2}\times35}{1.94\times10^{5}}\approx1.62\ (\mathrm{t/cm^2})$$

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}S_{max}}{bI}\approx1.24\times30\times10^{-2}\approx0.372\ (\mathrm{t/cm^2})$$

若 w 为长期荷载，使用的钢材为 SS41，则其容许的弯曲与剪切应力为

$$f_{badm}=1.6\ \mathrm{t/cm^2};\ f_{sadm}\approx0.924\ \mathrm{t/cm^2}$$

因此为满足 $\sigma_{max}<f_{badm}$，需稍加大翼缘，而目前的腹板大小满足 $\sigma_{max}<f_{sadm}$。

(参考)若不是组合截面而是型钢时，由于腹板与翼缘连接部分的圆弧等，A，I 均有所增大。规格品型钢的截面特性值是给定的。

对工字形钢 700 mm × 300 mm × 13 mm × 24 mm 的截面二次矩为 $2.01\times10^{5}(\mathrm{cm}^4)$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{I}y_{max}=\frac{90\times10^2\times35}{2.01\times10^5}=1.57\ (t/cm^2)<f_{badm}$$

处于容许应力范围内(由于剪应力在组合截面的计算中已具有充分的安全度,故型钢更无问题)。



5.5.2　剪应力流、剪切中心

图 5.62(a) 将例题 1,2 的工字形截面的结果三维地表示出来。其实,该图是有错误的。例如,在翼缘的内边缘存在有约 $0.4Q\times10^{-3}$ 的剪应力,如图 5.62(b) 那样将该部分切出来研究,若在边缘没有与该剪应力相等的外力作用则不可能存在有这样的剪应力(一般来说,物体表面附近的应力与外力的强度——单位面积上的力——相等)。为研究为什么会产生图 5.62(b) 那样的错误,将存在弯矩(M)、剪力(Q) 的工字形梁翼缘的一部分切出,重新研究力的平衡关系(图 5.63)。由于作用在小片上的轴力 N(x 方向的力) 是由

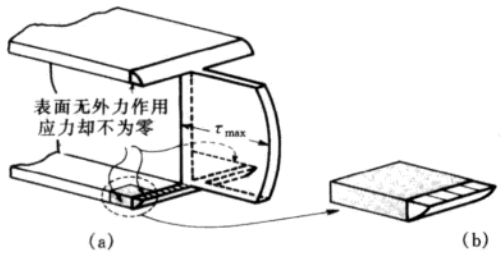


图 5.62　工字形截面内的剪应力分布图(该图有错误)

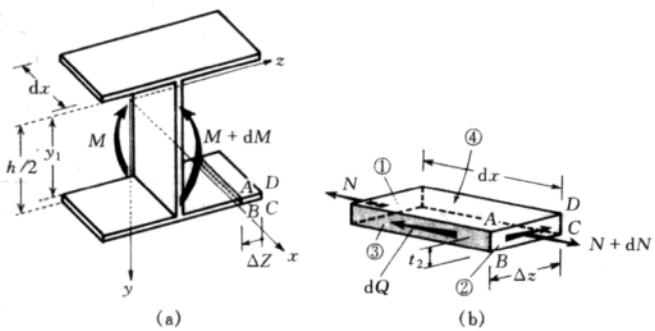


图 5.63　将翼缘切开进行考察便可理解 ④ 面存在剪应力是不合理的

弯矩 M 与 $M+\mathrm{d}M$ 产生的,根据 119 页的脚注及图 5.63,有

$$N=\int\sigma\mathrm{d}A=\int_{y_1}^{h/2}-\frac{M}{I}y\mathrm{d}A=-\frac{M}{I}\int_{y_1}^{h/2}y\Delta z\mathrm{d}y=-\frac{M}{I}\Delta z\int_{y_1}^{h/2}y\mathrm{d}y$$

$$N+\mathrm{d}N=-\int_{y_1}^{h/2}\frac{M+\mathrm{d}M}{I}y\mathrm{d}A=\frac{-\Delta z}{I}\left(M+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\int_{y_1}^{h/2}y\mathrm{d}y$$

故有

$$\mathrm{d}N=-\frac{\Delta z}{I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\int_{y_1}^{h/2}y\mathrm{d}y=\frac{\Delta z}{I}Q\mathrm{d}x\int_{y_1}^{h/2}y\mathrm{d}y \tag{5.57}$$

① 面与 ② 面上的轴力差当然必须由 ③ 面来抵消,这就是在 ③ 面上产生剪力 $\mathrm{d}Q$ 的原因。即

$$\mathrm{d}N=\mathrm{d}Q=\bar{\tau}_{zx}t_2\mathrm{d}x$$

式中,t_2 是小片的厚度,$\bar{\tau}_{zx}$ 是 ③ 面上的平均剪应力。由于 $\tau_{zx}=\tau_{xz}$,故

$$\bar{\tau}_{zy} = \bar{\tau}_{yz} = \frac{\Delta z Q}{It_2}\int_{y_1}^{h/2} y\mathrm{d}y \tag{5.58}$$

由式(5.58)可知，$\bar{\tau}_{zy}$ 与 Δz 成正比。若 $\Delta z = 0$(即边缘)，则 $\bar{\tau}_{zx}$ 为零。结果可将图 5.62(a) 改画成图 5.64。

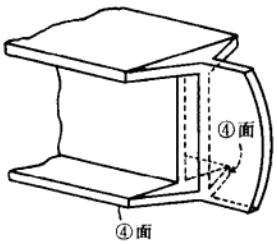


图 5.64 翼缘的边缘部分(④面)的剪应力为零，但仍有错误

实际上图 5.64 也非正确的图，而应像图 5.65 那样边缘部分的剪应力应为零。为什么会出现这样的矛盾。这是由于在得出梁的(弯曲)基本公式 $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2 = M/EI$ 时的基本假定，即平面假设和截面形状不变的假设等在严格的意义上是不成立的。但是，这样的假定所引起的误差很小，只要对工程问题 —— 即结构设计等 —— 不产生影响，在引进了这些假定后将使分析变得十分简单。利用在严格意义上与实际现象略有不同的假定所得到的结果被称为近似解，可以说，几乎所有的理工体系问题的解均是近似解。因此，在求解工程问题时建立合适的假定是十分关键的①。

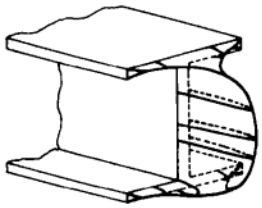


图 5.65 实际的剪应力图

回到式(5.58)，对工字形钢 700 mm × 300 mm × 13 mm × 24 mm 就 $\Delta z = b/2 = 15$ 进行计算，有

$$\tau_{zy} = \frac{\Delta z\, Q}{It_2}\int_{y_1}^{h/2} y\mathrm{d}y = \frac{81.1\times 15\times 10^3}{1.94\times 2.4\times 10^5}Q = 2.61Q\times 10^{-3}$$

再一次观察图 5.63(b)，由于 ② 面指向 x 的正向而剪应力也指向 z 的正向，故作用在 ② 面上的剪应力的符号为正(+)。同样在翼缘中指向 z 负向的剪应力为负。考虑到剪应力的大小和方向，将之用箭头画在工字形截面上如图 5.66(b) 所示，图 5.66(a) 是 τ 图。由图 5.66(b) 可见，剪应力在上面的翼缘中是从两侧向中间流动，在腹板处合流之后流入腹板进而左右分开流入下面的翼缘并到达翼缘的两端。因此将这样的剪应力称为**剪应力流**。对工字形这样的对称截面，剪应力流也对称，左右平衡。那么，非对称截面中的剪应力又是怎样分布呢？

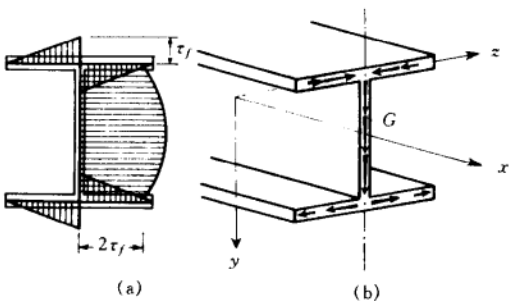


图 5.66 工字形截面中的剪应力分布及剪应力流

将图 5.67 所示的截面称为槽形截面。如图 5.67(a) 所示作为简支梁，在中央作用集中荷载 P，用与工字形梁完全相同的方法求解可得截面 aa' 的剪应力流及剪应力，如图 5.67(b)，(c)，(d) 所示。这里按图 5.67(c) 取剪应力对截面形心 G 的矩，由于不能保持平衡，这样将产生**扭转**。

为简单地进行考察，研究左右翼缘高度不同的 H 型截面(图 5.68)。图中的 G 是形心。设 t_1 很薄，则剪力 Q 几乎由左右的 A，B 两部分承担。A，B 部分若为分别独立的梁，则为使 A，B 产生同样的变形(挠度)，从梁的基本公式 $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2 = M/EI$ 来看，A 梁的力矩 M_A 与 B 梁的力矩 M_B 必须与 A，B 梁的二次矩 I_A 和 I_B 成正比

① 例如所谓匀质的物质在世界上是不存在的，但人们将大致匀质的物质作为完全各向同性和匀质材料来处理。

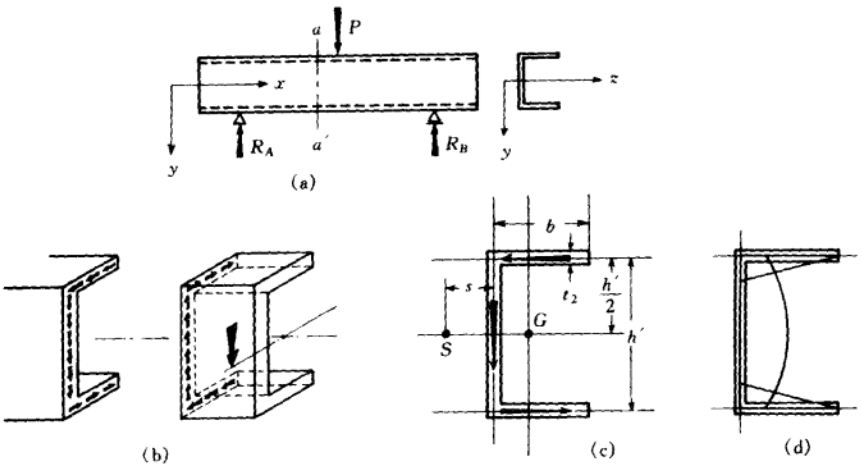


图 5.67 槽形截面中产生的剪应力流

$$\frac{M_A}{I_A}=\frac{M_B}{I_B}$$

因此，剪力 Q 也必须按 I_A 和 I_B 的比率由 A，B 梁分别承担。设 A，B 梁分担的剪力为 Q_A，Q_B，有以下关系成立

$$\begin{cases}Q=Q_A+Q_B\\ Q_A/I_A=Q_B/I_B\end{cases}\tag{5.59}$$

因此，剪力 Q 必须通过满足关系

$$\frac{b_A}{b_B}=\frac{I_B}{I_A}$$

的 S 点(图 5.68)。若作用在梁上的外力 Q 不通过 S，则 A，B 梁的变形不一致，梁将产生扭转。若外力通过 S 点作用则杆件不产生扭转，将 S 点称为**扭转中心或剪切中心**。

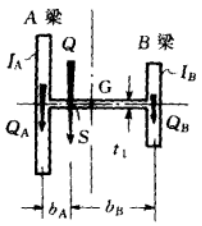


图 5.68 剪切中心 S 是指：当将截面左右分开考虑时，将左右截面的二次矩 I_A，I_B 对该点取矩时满足关系 $I_Ab_A=I_Bb_B$ 的平衡点

在考虑槽形截面中剪应力流产生扭矩时(图 5.67(c))，由于上下翼缘的剪应力流形成逆时针方向的扭矩，为与该扭矩抵消必须选择 S 点使腹板的剪应力流形成顺时针方向($s\times$ 腹板的剪应力流 → 顺时针回转)的扭矩，则 S 点如图 5.67(c) 所示将出现在截面之外。因此，在作用荷载时必须如图所示将加力架延伸到 S 点，若不这样做将使梁产生扭转(图 5.69)。同时，当荷载不通过剪切中心时，截面将绕剪切中心发生扭转，由此将剪切中心也称为**扭转中心**。剪切中心的位置是根据截面的形状确定的。

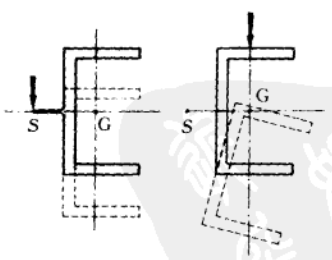


图 5.69 若荷载不作用在槽形截面的剪切中心 S 上，则腹板与翼缘剪应力流的矩不能保持平衡，它将产生扭转加挠曲。剪切中心位于截面之外

将上述考察的结果整理后，可得以下结论。

(1) 如图 5.60(a) 所示，在纸面上画出产生弯曲和剪应力的工字形梁截面时，在翼缘和腹板中均存在与纸面垂直的**剪应力**。

(2) 根据剪应力之间的平衡关系($\tau_{xy} = \tau_{yx}$)，同时还存在沿纸面的剪应力。

(3) 沿纸面的剪应力如图 5.66(a) 所示，在翼缘中从端部向中心呈线性增大。

(4) 剪应力的大小与方向如图 5.66(b) 所示，用箭头表示后，其分布为从上部的翼缘通过腹板由下部的翼缘流出。称之为**剪应力流**。

(5) 像工字形截面这样的对称截面，剪应力流保持左右平衡，若荷载的合力通过截面的形心则截面不发生扭转。

(6) 对非对称截面，例如槽形截面，即使荷载作用在形心还是要发生扭转。但是，若荷载作用在**剪切中心** S 点，则不发生扭转。



图 5.70 第 4 章与第 5 章的内容需花 2 年或 3 年的时间学习，但它们不过是 $d^2v/dx^2 = M/EI$ 关系的应用而已

第 5 章的总结：

学习了根据梁的基本公式推导出来的 3 种解法(转角法、刚臂法、矩阵法)。转角法是其它两种解法的基础，故十分重要。当未知数超过 3 个时，可能进行手算的仅有刚臂法。矩阵法适用于利用计算机求解，且可考虑柱的轴向变形。

同时还考察了线材截面中的应力分布。在受弯杆件的截面中，除弯矩产生的应力外尚存在剪应力，它们在截面中的分布是不均匀的。在容许应力设计法中，设计条件是最大应力值不超过容许应力值。

第 5 章练习题

5.1 用转角法求解图 5.71 所示刚架，画出变形简图及 M 图、Q 图。(A 级)

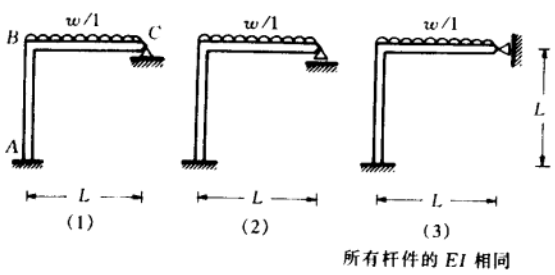


图 5.71

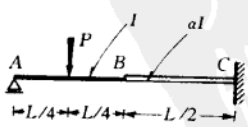


图 5.72

5.2　用转角法求解图 5.72 所示变截面梁，求出 M 图、Q 图及 B 点的挠度。(B 级)

5.3　对图 5.73 所示刚架用转角法求出梁柱的刚度比 $K_2/K_1=\alpha$ 与梁水平位移的关系并用图表示出结果。当可假定 $K_2=\infty$ 时对 α 进行考察，求出此时水平振动的固有周期。(A 级)

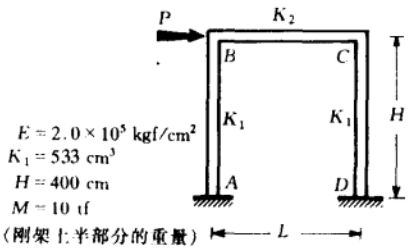


图 5.73

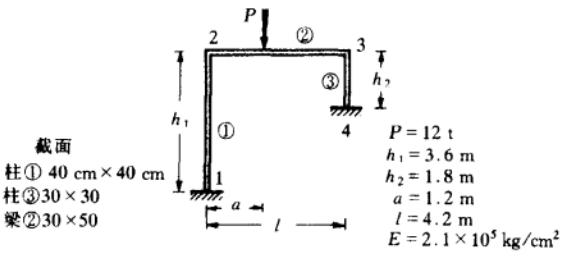


图 5.74

5.4　用转角法求解图 5.74 所示刚架，画出 M 图、Q 图及梁的水平位移。(A 级)

5.5　用转角法求解图 5.75 所示刚架，画出变形简图及 M 图、Q 图。(B 级)

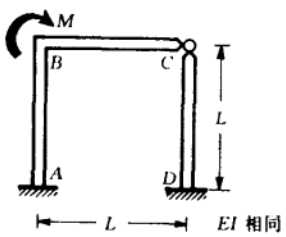


图 5.75

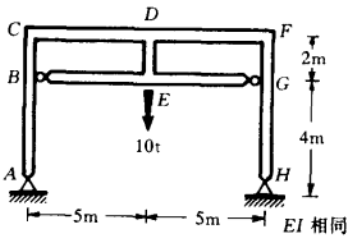


图 5.76

5.6　用转角法求解图 5.76 所示刚架，画出 M 图、Q 图。(C 级)

5.7　对图 5.77(a) 所示两端有转动弹簧的杆件推导出其转角法的基本公式(M_{AB}、M_{BA} 与 θ_A、θ_B 的关系)。设转动弹簧的弹簧常数为 k_A、k_B，弹簧与支座的距离 a、b 可忽略不计。此外杆件转角可不考虑。(C 级)

用转角法求解图(b) 所示刚架，画出 M 图。用图表示柱头柱脚弯矩与 k 的关系，考察 k 的意义。(B 级)

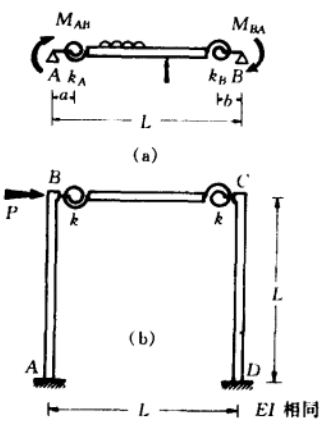


图 5.77

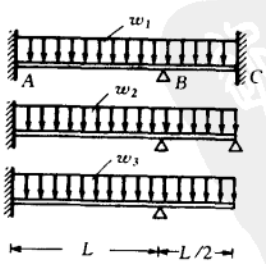


图 5.78

5.8　用刚臂法求解图 5.78 所示梁，求出 M 图，根据固定端弯矩相等的条件确定 w_1、w_2、w_3 的大小。(A 级)

5.9 用刚臂法求解图 5.79 所示梁，画出 M 图，并求出各支座的反力。(A 级)

5.10 用刚臂法求解图 5.80 所示刚架，画出 M 图。(A 级)

5.11 用刚臂法求解图 5.81 所示刚架，画出 M 图、Q 图及求出梁的水平位移。(B 级)

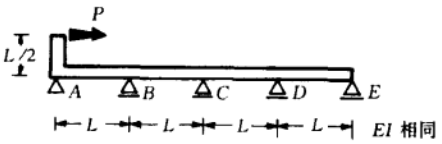


图 5.79

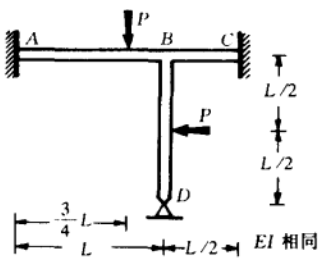


图 5.80

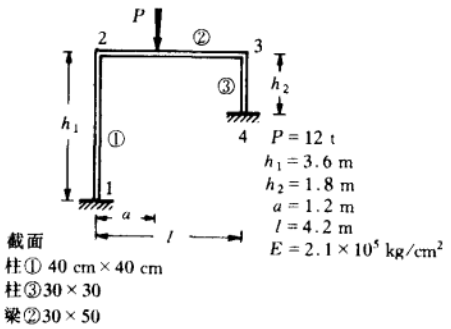


图 5.81

5.12 用刚臂法求解使图 5.82 所示刚架的柱产生 1/300 杆件转角(层间位移角)所需的水平力 P。(B 级)

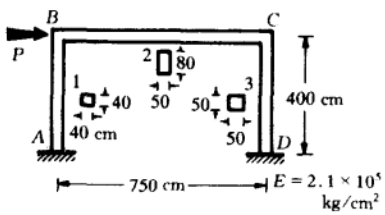


图 5.82

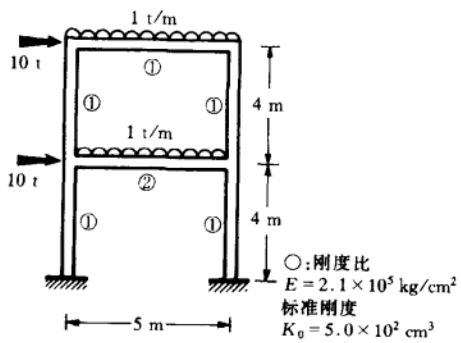


图 5.83

5.13 用刚臂法求解图 5.83 所示刚架，求出 M 图、Q 图及层间位移角。(B 级)

5.14 推导出柱脚为铰支的柱的分担系数公式(B 级)。利用该公式及刚臂法求解图 5.84、5.85 所示刚架，画出 M 图。(C 级)

5.15 就图 5.86 所示刚架回答以下问题。(B 级)

(1) 求出无斜撑时 C 点的水平位移。

(2) 用图表示出斜撑截面积 A 与每根柱所承担剪力 Q 之间的关系。

5.16 用矩阵法求解图 5.87 所示超静定桁架，求出变形及内力。(B 级)

5.17 求出图 5.88 所示体系的固有周期。

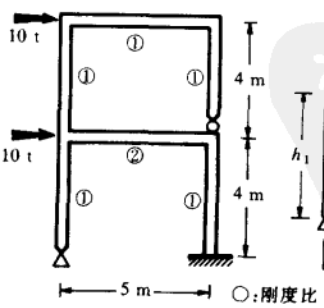


图 5.84

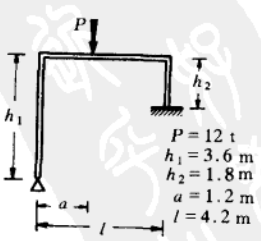


图 5.85

（A 级）

对静止的重锤给予初始位移 d、初始速度 v 并令其产生振动，重锤的振幅为多少。k 为弹簧常数，w 为重锤的重量，忽略梁的自重。

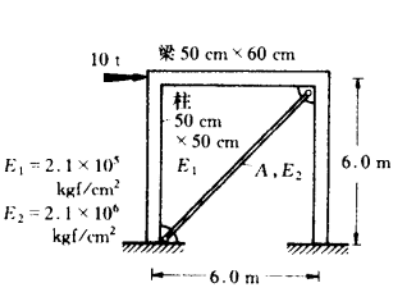


图 5.86

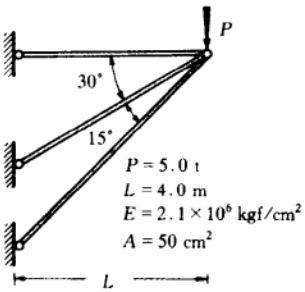


图 5.87

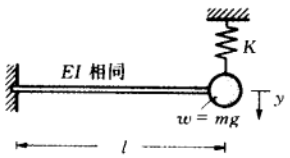


图 5.88

5.18　就图 5.89 所示二层刚架回答以下问题。（C 级）

（1）如图所示，当水平位移为 $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 时，用矩阵表示出它与水平外力 $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ 的关系。

（2）当设各层的质量为 $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$ 时，根据达朗贝尔原理推导出该刚架的自由振动方程式并用矩阵表示。

（3）设（2）中的微分方程式的解为 $\begin{bmatrix} U_1 e^{\omega t} \\ U_2 e^{\omega t} \end{bmatrix}$，考察解存在的条件（固有值问题）。

（4）利用给出的数据求出该刚架的固有周期。

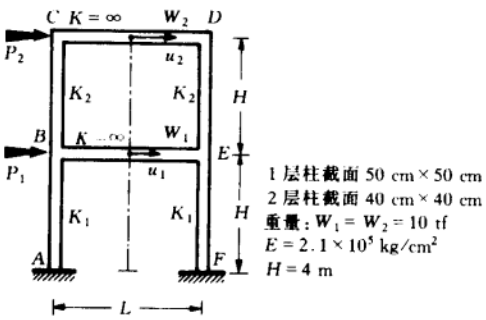


图 5.89

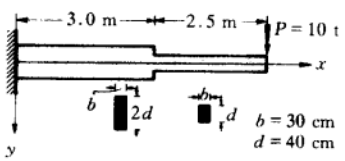


图 5.90

5.19　求出图 5.90 所示梁在截面产生的最大弯曲应力和最大剪切应力。（A 级）

5.20　如图 5.91 所示，在两端铰接槽形钢柱形心位置作用集中荷载 P。将之与作用在剪切中心的情况进行对比并讨论。（A 级）

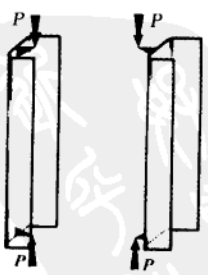


图 5.91

附　录



附录 1　三角函数

画出单位圆与六角形，三角函数之间的关系便可大致求得。

(1) 单位圆(图 A1.1)：$r=1$

[例]

$\sin\theta = b/r = b$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta = -b$

$\cos\theta = a/r = a$，$\cos(-\theta) = \cos\theta = a$

$\tan\theta = b/a = \sin\theta/\cos\theta$

(参照三角函数的六角形)

$\sin(\theta+\pi/2) = \sin(\theta+90^\circ) = a = \cos\theta$

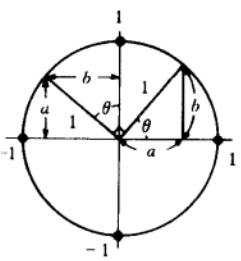


图 A1.1　单位圆

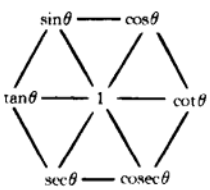


图 A1.2　三角函数的六角形

(2) 三角函数的六角形(A1.2)

[顺时针方向的例]

$\cos\theta/\sin\theta \to \cot\theta$

$\cot\theta/\sin\theta \to \mathrm{cosec}\theta(=1/\sin\theta)$

[逆时针方向的例]

$\sin\theta/\cos\theta \to \tan\theta$

$\tan\theta/\sin\theta \to \sec\theta(=1/\cos\theta)$

[对角线的例]

$\dfrac{1}{\sin\theta} = \mathrm{cosec}\theta$，$\dfrac{1}{\mathrm{cosec}\theta} = \sin\theta$，

$\dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$，$\dfrac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

[平方的关系(使用六角形中的反三角形部分)]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$，

$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

(3) 其他

特别重要的有

$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$



附录 2　微分、积分

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$x^{n+1}/n+1(n\neq -1)$	x^n
$\log\lvert x\rvert$	x^{-1}
$a^x/\log a$	a^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x(=1/\cos^2 x)$
e^{ax}	ae^{ax}
$f(x)\pm g(x)$	$f'(x)\pm g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$f(x)/g(x)$	$[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]/g(x)^2$
$\log\lvert f(x)\rvert$	$f'(x)/f(x)$

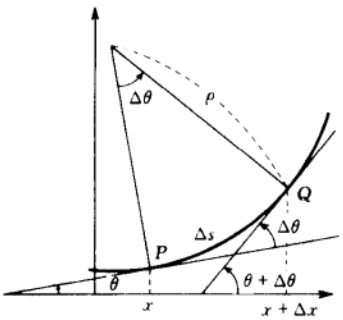
分部积分：

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

积分变换：

$x=\varphi(t)$，$a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$



$\Delta s=\rho\Delta\theta$ $(\mathrm{d}s=\rho\mathrm{d}\theta)$

$f'(x)=\tan\theta$

$f'(x+\Delta x)=\tan(\theta+\Delta\theta)$

图 A2.1

计算例：求曲线 $f(x)$ 曲率 $1/\rho$（图 A2.1）。

$$\rho\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}s$$

所以 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\quad\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\Big/\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$

且根据 $\tan\theta=f'(x)$，将之对 x 微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=(1+\tan^2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$=\{1+[f'(x)]^2\}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=f''(x)\qquad(A2.1)$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{f''(x)}{1+[f'(x)]^2}$$

同时有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}$$

$$=\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\{1+[f'(x)]^2\}^{1/2}\qquad(A2.2)$$

因此

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=f''(x)/\{1+[f'(x)]^2\}^{3/2}\qquad(A2.3)$$



附录 3 泰勒展开的证明

(1) 罗尔(Rolle)定理

“$f(x)$ 为在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，在 $a<x<b$ 上可微的函数，设 $f(a)=f(b)$。此时在 $a<c<b$ 上至少存在有一个 c 满足 $f'(c)=0$（罗尔定理）”。

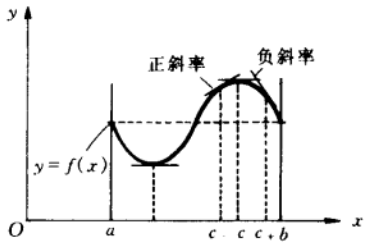


图 A3.1 罗尔定理

将该定理画在图 A3.1 上，可以看出这是当然的结论，它是下面平均值定理的特例，是很重要的公式。该定理的证明如下。

当 $f(x)=k=$ 常数时，$f'(x)=0$。当 $f(x)$ 不为常数时，则在 $a\leqslant x\leqslant b$ 的区间内必存在最大值 M 或最小值 m。必然有 $m\neq f(a)$ 或 $M\neq f(a)$ 之一成立或两者均成立。设 $M\neq f(a)$，则在 $a<c<b$ 上存在 c 点满足 $M=f(c)$。由于 c 点是最大值，c 点的左侧 (c_-) 的斜率为正，右侧 (c_+) 的斜率为负，即 $f(c_-)\geqslant 0$，$f(c_+)\leqslant 0$。$f(x)$ 为可微函数，因此当 $(c_-)\to c$，$(c_+)\to c$ 时，$f'(c_-)=f'(c_+)=f'(c)$，故 $f'(c)=0$。对 $m\neq f(a)$ 时可作同样的证明。

(2) 平均值定理

“设 $f(x)$ 为在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，在 $a<x<b$ 上可微的函数，则至少存在有一个 c 满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(a<c<b)\qquad(A3.1)$$

（平均值定理）”。

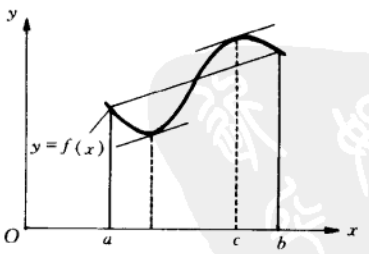


图 A3.2 平均值定理

将该定理画在图 A3.2 上，可以看出这是当然的结论。证明：

设 $A=[f(b)-f(a)]/(b-a)$，则函数

$$F(x) = f(b) - f(x) - A(b-x)$$

有

$$F(a) = F(b) = 0$$

根据罗尔定理，$F'(c) = -f'(c) + A = 0$。因此

$$f'(c) = A$$

(3) 泰勒展开

正确的泰勒展开应为

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(\Delta x)^i + R_n$$

其中

$$R_n(=\text{余项}) = \frac{f^{(n)}(x+\theta\Delta x)}{n!}(\Delta x)^n \quad (0<\theta<1) \qquad \text{(A3.2)}$$

当 $\Delta x \ll 1$ 时，可取 $n=2$ 或 $n=3$。当然此时的公式为近似式，误差很小但也有误差 R_n，称之为余项（或拉格朗日余项）。此外，当 $n=1$ 时的泰勒展开与平均值定理相同。其证明如下。

设 $a<b$，令

$$A = \frac{n!}{(b-a)^n}\left[f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i\right]$$

若设

$$F(x) = f(b) - \left[f(x) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}(b-x)^i + \frac{A}{n!}(b-x)^n\right]$$

则对 $F(a) = F(b)(=0)$ 有罗尔定理成立，

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}(A - f^{(n)}(x)) = 0$$

所以 $A = f^{(n)}(c) \quad (a<c<b)$

设 $\theta = \dfrac{c-a}{b-a}$，则可写成 $c = a + \theta(b-a)$，$0<\theta<1$。

令 $a \to x$，$b \to x+\Delta x$ 可得(A3.2)式。



附录 4 向量

向量的定义为：

(1) 从直觉上可认为是不仅有大小且有方向的量。

(2) 用现代的数学语言则应作如下的表述：

设实数的集合为 R，某一种量的集合为 V。$x, y, z \in V$，即 x, y, z 为 V 的元素(或元)，且有 $x+y \in V$，$ax = xa \in V (a, b \in R)$ 时，满足以下条件的量称为向量。

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$	和的结合率
(2) $x+0 = 0+x = x$	存在零元素
(3) $x+x' = x'+x$	存在逆元素
(4) $x+y = y+x$	和的交换率
(5) $a(bx) = (ab)x$	积的结合率
(6) $1 \cdot x = x$	存在单位元素
(7) $(a+b)x = ax+bx$	
$a(x+y) = ax+ay$	积的分配率

[注意] 称 R 为标量空间(其元 $a, b, \cdots$ 为标量)，V 为向量空间(其元 $x, y, \cdots$ 为向量)。向量与标量不同，不满足积的交换率($ab = ba$，但不一定 $xy = yx$)。



附录 5 矩阵运算

矩阵的语源为词汇 MATER(= mother)，它经历了以下的变化：母体 → 制造物品的原型 → 铸具 → 纵横有规则地排列的数字，在数学上译为“矩阵”。称横方向为**行**，纵方向为**列**。处于矩阵的第 i 行，第 j 列的数字称为 i 行 j 列的**元素**，用 a_{ij} 表示。例如矩阵

$$\begin{array}{c} \text{1列 2列 3列 4列} \\ \left.\begin{array}{l}\text{1行}\\ \text{2行}\\ \text{3行}\end{array}\right. \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}}^{\text{4列}} \end{array} \} \text{3行}(=\boldsymbol{A}=[a_{ij}]) \qquad \text{(A5.1)}$$

的第 2 行第 3 列的元素为 $7(a_{23})$。同样地第 3 行第 2 列的元素 a_{32} 为 $10(a_{32}=10)$。

矩阵的大小用行的总数 m 与列的总数 n 来表示，称为大小是 $m \times n$ 的矩阵。上面所示矩阵的大小为 3×4。

两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相等，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，意味着两者的大小当然必须相等，同时它们所有的对应元素(i 行 j 列的元素 a_{ij}, b_{ij})均必须相等($a_{ij} = b_{ij}$)。

(1) 矩阵的加减运算

一般而言，行与列具有不同的性质。例如下面所示“存款金额”的矩阵中，将家庭作为行而用列表示家庭成员。其中的第 2 行第 3 列表示铃木家庭第 1 个孩子的存款金额为 25 万日元。

$$\begin{array}{c} \\ 山田 \\ 铃木 \\ 田中 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 夫 & 妻 & 第1子 & 第2子 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 300 & 200 & 10 & 3 \\ 100 & 250 & 25 & 10 \\ 500 & 100 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

存款 （单位：万日元）

这里设计划转入存款的奖金或压岁钱的收入为

$$\begin{array}{c} \\ 山田 \\ 铃木 \\ 田中 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 夫 & 妻 & 第1子 & 第2子 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 50 & 10 & 5 & 2 \\ 20 & 80 & 8 & 4 \\ 120 & 10 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

收入金额 （单位：万日元）

在款存入后，计算他们各自存款的总额应为多少。很清楚地有

$$\begin{bmatrix} 300 & 200 & 10 & 3 \\ 100 & 250 & 25 & 10 \\ 500 & 100 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 10 & 5 & 2 \\ 20 & 80 & 8 & 4 \\ 120 & 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 300+50 & 200+10 & 10+5 & 3+2 \\ 100+20 & 250+80 & 25+8 & 10+4 \\ 500+120 & 100+10 & 3+4 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 350 & 210 & 15 & 5 \\ 120 & 330 & 33 & 14 \\ 620 & 110 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

这样，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和，是将 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的位于同一行列的所有元素求和。即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[(a_{ij}+b_{ij})]=[c_{ij}]$$

（式中 $i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）

由此可类推到两个矩阵之差也是所有对应元素之差。

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[(a_{ij}-b_{ij})]=[d_{ij}] \tag{A5.2}$$

[例题 1(A 级)]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 10 & -8 & 7 \\ -5 & 9 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 7 & -6 & -1 \\ -4 & 8 & -2 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$。

解 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，可得

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 10+7 & -8-6 & 7-1 \\ -5-4 & 9+8 & 4-2 \\ 3-2 & -6-3 & 12+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 & -14 & 6 \\ -9 & 17 & 2 \\ 1 & -9 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 10-7 & -8-(-6) & 7-(-1) \\ -5-(-4) & 9-8 & 4-(-2) \\ 3-(-2) & -6-(-3) & 12-5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

这样，矩阵的加减运算仅在大小相同的矩阵之间才能进行。

(2) 矩阵的积

矩阵演算中最重要的是乘法运算，其基本运算是行向量与列向量之积。当矩阵仅由一行构成时，即大小为 $1\times n$ 的矩阵称为行向量，反之仅由一列构成的大小为 $m\times 1$ 的矩阵则称为列向量（或简单地就称向量）。例如 $\boldsymbol{u}$ 为大小为 1×3 的行向量，$\boldsymbol{f}$ 为大小为 3×1 的列向量，将它们的元素全部写出来为

$$\boldsymbol{u}=(u_{11}\ u_{12}\ u_{13}),\quad \boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{bmatrix}$$

从而可定义 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 之积为

$$\boldsymbol{uf}=u_{11}f_{11}+u_{12}f_{21}+u_{13}f_{31} \tag{A5.3}$$

这相当于求二个向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{F}$ 的标量积，即

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}=(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3)(F_1\boldsymbol{e}_1+F_2\boldsymbol{e}_2+F_3\boldsymbol{e}_3)=(u_1F_1+u_2F_2+u_3F_3)=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{F}|\cos\theta$$

（一般有 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i=1$，$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0(i\neq j)$ 根据这些关系可得上面的结果。θ 为两向量的夹角）

这与令 $u_{11}\rightarrow u_1$，$u_{12}\rightarrow u_2$，$u_{13}\rightarrow u_3$，$f_{11}\rightarrow F_1$，$f_{21}\rightarrow F_2$，$f_{31}\rightarrow F_3$ 时（A5.3）式的结果一样。若 $\boldsymbol{F}$ 为物体所受的力，$\boldsymbol{u}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 引起的物体位移，则两者的标量积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}$ 即为力所做的功，这在本书 1.2 及 1.7 节中已有说明。将式（A5.3）用图来表示即为图 A5.1。若能理解上述积的定义，则矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 之积不过是式（A5.3）的简单应用。若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的 i 行 j 列的元素 c_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行向量与 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列向量之积。对 $\boldsymbol{A}$ 的所有行和 $\boldsymbol{B}$ 的所有列执行上述运算过程，则得 $\boldsymbol{C}$ 的所有元素。用图来表示即为

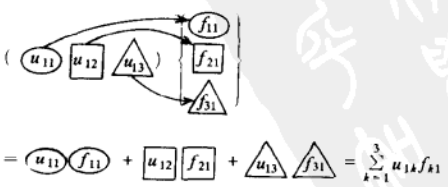


图 A5.1 行向量 $\boldsymbol{u}$ 与列向量 $\boldsymbol{f}$ 之积

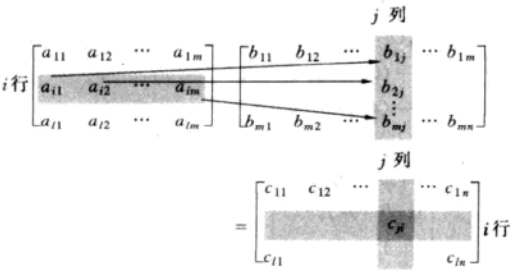


图 A5.2 矩阵的积(乘法)

图 A5.2。此时需对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的大小作出限制,即 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数若不一致则乘法运算便无法进行。若 $\boldsymbol{A}$ 的大小为 $l\times m$,$\boldsymbol{B}$ 的大小为 $m\times n$,则 $\boldsymbol{C}$ 的大小为 $l\times n$。图 A5.2 所示的乘法运算的规则用公式来表达,有

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 关系成立时,$\boldsymbol{C}$ 的元素为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj} \tag{A5.4}$$

(其中,$k=1,2,\cdots,m$;m 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数或 $\boldsymbol{B}$ 的行数)

[例题 2(A 级)]

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10&-8\\-5&9\\3&-6\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7&-6&-1\\-4&8&-2\end{bmatrix}$$

大小(3×2) 大小(2×3)

求 $\boldsymbol{AB}$。

解

$$\begin{bmatrix}10&-8\\-5&9\\3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-6&-1\\-4&8&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}70+32&-60-64&-10+16\\-35-36&30+72&5-18\\21+24&-18-48&-3+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}102&-124&6\\-71&102&-13\\45&-66&9\end{bmatrix}$$

此外尚有

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$(交换率不成立)

(3) 各种矩阵

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素的行与列交换后形成的矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 称为转置矩阵。例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10&-8\\-5&9\\3&-6\end{bmatrix},\text{则 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}10&-5&3\\-8&9&-6\end{bmatrix}$$

特别是若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,即有关系 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$ 时,将 $\boldsymbol{A}$(故也指 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$)称为**对称矩阵**。一般将行数与列数相等的 $n\times n$ 矩阵称为**方阵**,对称矩阵是方阵的一种。例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}100&-30&50\\-30&200&-80\\50&-80&250\end{bmatrix}.$$

是对称矩阵。这是根据各元素以对角线上的元素(a_{ii})为对称轴呈对称排列而得名的。其中,将 $a_{ij}=a_{ji}=0(i\neq j)$ 的情况称为**对角矩阵**,特别对 $a_{ij}=\delta_{ij}$(δ_{ij} 为克罗内克记号,$i=j,\delta_{ij}=1$;$i\neq j,\delta_{ij}=0$)的矩阵称为**单位矩阵**。例如,对角矩阵有

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&10&0\\0&0&15\end{bmatrix}$$

单位矩阵有

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之积为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{I}$ 起到了相当于数值运算中的 1 的作用。

$$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$$

(4) 逆矩阵

对矩阵 $\boldsymbol{A}$,当存在满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为**正则矩阵**,同时称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$。若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是方阵,当 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$ 成立时,$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 也成立。

(5) 多元联立一次方程式的解法

有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元联立方程式一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{A5.5}$$

$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 为已知的系数,b_i 也已知。利用矩阵之积(A5.4)式可将(A5.5)式写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{A5.6}$$

可将其简写为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{A5.7}$$

为求解(A5.5)式(亦即(A5.6)式,(A5.7)式)有许多方法,这里就方法之一的高斯—约当法进行说明。作为例题求解(A5.8)式,$n=3$。

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \tag{a}$$

$$4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 12 \tag{b}$$

$$2_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \tag{c}$$

或

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix} \tag{A5.8}$$

求解的步骤如下。

1) 将(a)式的两边除以 $a_{11}(=2)$。若 $a_{11}=0$ 则另作考虑①。

$$x_1 + x_2 - 1.5x_3 = -1.5 \tag{a'}$$

$$4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 12 \tag{b}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \tag{c}$$

2) 执行运算(b)$-$(a')$\times a_{21}$,(c)$-$(a')$\times a_{31}$,将(b),(c)式中的 x_1 消去。

$$x_1 + x_2 - 1.5x_3 = -1.5$$

$$(4-4)x_1 + (-5-4)x_2 + (6+4\times 1.5)x_3 = (12+4\times 1.5)$$

$$(2-2)x_1 + (3-2)x_2 + (1+2\times 1.5)x_3 = (11+2\times 1.5)$$

计算的结果为下列方程式

$$x_1 + x_2 - 1.5x_3 = -1.5 \tag{a'}$$

$$-9x_2 + 12x_3 = 18 \tag{b'}$$

$$x_2 + 4x_3 = 14 \tag{c'}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.5 \\ 0 & -9 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix}$$

至此第一阶段结束。以后是重复上述的计算,目的是要消去(b')式,使 x_2 的系数为0。

3) 用 x_2 的系数 $a_{22}(=-9)$ 除(b')式。

$$x_1 + x_2 - 1.5x_3 = -1.5 \tag{a'}$$

$$x_2 - (4/3)x_3 = -2 \tag{b''}$$

$$x_2 + 4x_3 = 14 \tag{c'}$$

4) 执行运算(a')$-$(b'')$\times a_{12}$,(c')$-$(b'')$\times a_{32}$,将(a'),(c')式中的 x_2 消去。

$$x_1 - (0.5/3)x_3 = 0.5 \tag{a''}$$

$$x_2 - (4/3)x_3 = -2 \tag{b''}$$

$$(16/3)x_3 = 16 \tag{c''}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.5/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 16/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

至此第二阶段结束。下面考虑 x_3 的系数。步骤与第一、二阶段完全相同。

5) 用 $a_{33}(=16/3)$ 除(c'')式。

$$x_1 - (0.5/3)x_3 = 0.5 \tag{a''}$$

$$x_2 - (4/3)x_3 = -2 \tag{b''}$$

$$x_3 = 3 \tag{c'''}$$

6) 执行运算(a'')$-$(c''')$\times a_{13}$,(b'')$-$(c''')$\times a_{23}$,消去 x_3。

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

这样通过乘、除运算,最终将 $\boldsymbol{x}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变成了单位矩阵 $\boldsymbol{I}$,即变成了

$$\boldsymbol{Ix} = \boldsymbol{b}' \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{A5.9}$$

该计算方法反复使用同样的步骤,适合于用计算机计算。将计算的顺序画成流程图(图 A5.3)。

考察式(A5.6,A5.7),可见还有另一种方法:可先求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 后再求 $\boldsymbol{x}$。即对式(A5.7)的两边乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{前文 A5.7}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

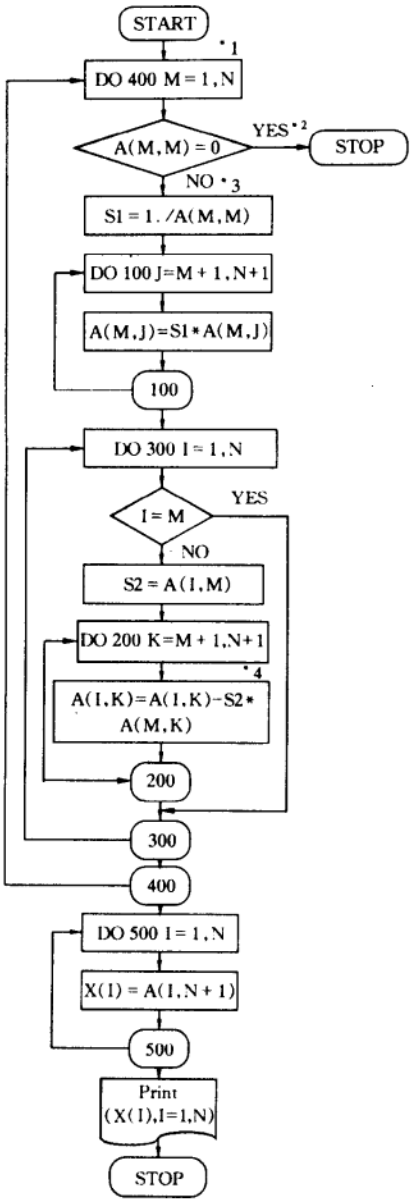
所以 $\boldsymbol{Ix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$

所以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})$ (A5.10)

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的操作也可以利用高斯-约当法。这里将高斯-约当法稍作变形来求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。首先将求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的操作置换成已经学过的求解多元联立方程式的操作。

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

① 将方程式(a),(b),(c)的顺序改变,将 $a_{11} \neq 0$ 的式子作为(a)式。



*1 DO 400 M=1,N
表示从这儿开始到标号 400 的计算中，M 的取值从 1 开始到 N 增量为 1，反复执行。

*2 应为改变方程各式的顺序，但这样做将使流程图复杂化，故暂且作为 stop。符号 ◇ 表示有条件跳跃。

*3 $A(I,N+1)$意味着 $B(I)(=b)$。

*4 式中的 * 表示乘积(×)的意思。

图 A5.3

这里将 A^{-1} 设为 $X(A^{-1}\equiv X)$，进而将 X 看成是列向量的集合。

$$A[X_1X_2\cdots X_n]=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

所以 $AX_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，$AX_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，$\cdots$，$AX_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

因此若求解 n 组多元联立方程式则 X 即 A^{-1} 便可求出。通过使用高斯 - 约当法的例题，来考察系数随计算的变化。计算是对 n 组同时进行的。

开始

$$\overbrace{\begin{bmatrix}2&2&-3\\4&-5&6\\2&3&1\end{bmatrix}}^{A}\ \overbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}^{I}$$

$M=1$(第 1 行)—— 对 A 的第 1 列第 1 行赋 1 其他均为零。

$$\begin{bmatrix}1&1&-1.5&0.5&0&0\\4&-5&6&0&1&0\\2&3&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-1.5&0.5&0&0\\0&-9&12&-2&1&0\\0&1&4&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$M=2$(第 2 行)

$$\begin{bmatrix}1&1&-1.5&0.5&0&0\\0&1&-4/3&2/9&-1/9&0\\0&1&4&-1&0&1\end{bmatrix}$$

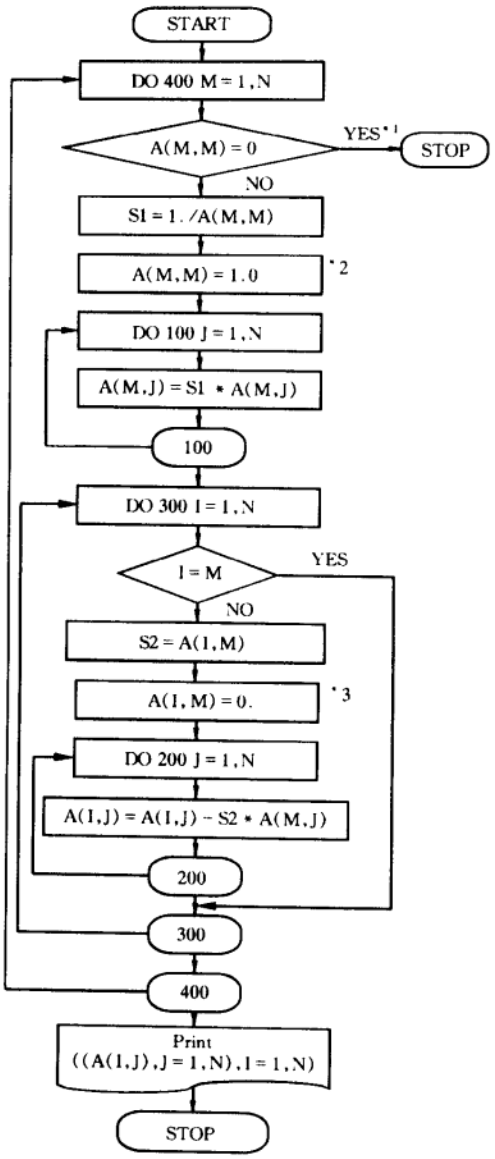
$$\begin{bmatrix}1&0&-0.5/3&2.5/9&+1/9&0\\0&1&-4/3&2/9&-1/9&0\\0&0&16/3&-11/9&+1/9&1\end{bmatrix}$$

$M=3$(第 3 行)

$$\begin{bmatrix}1&0&-0.5/3&2.5/9&+1/9&0\\0&1&-4/3&2/9&-1/9&0\\0&0&1&-11/48&+1/48&3/16\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&23/96&11/96&3/96\\0&1&0&-8/96&-8/96&24/96\\0&0&1&-22/96&2/96&18/96\end{bmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\frac{1}{96}\begin{bmatrix}23&11&3\\-8&-8&24\\-22&2&18\end{bmatrix}$



*1 参照图 A5.3 的(*2)
*2 在[I]的对角项中放入 1。
*3 在[I]的非对角项中放入 0。

图 A5.4

为校核，试计算 AA^{-1}

$$AA^{-1}=\frac{1}{96}\begin{bmatrix}2 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23 & 11 & 3\\ -8 & -8 & 24\\ -22 & 2 & 18\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{96}\begin{bmatrix}96 & 0 & 0\\ 0 & 96 & 0\\ 0 & 0 & 96\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

当利用计算机计算时，尽量不要将不必要的数据记入内存，同时将一次计算后、在以后的计算中无变化且对其它项无影响的项保存为存储单元使用，力图节约内存和时间。为此，如图 A5.4 所示，对 I 先不输入，在 A 的左侧部分(即逐渐变为 0 和 1 的部分)中随 I 项的变化而存入，最后将 A^{-1} 存入原来储存 A 的部分中。请注意其中有效利用内存的特点。已知 A 求 A^{-1} 的问题，例如由刚度矩阵 K 求柔度矩阵 α 等是结构力学中经常碰到的问题。

(6) 矩阵的固有值

关于固有值在 5.1.3 节的例题 4 中已有简单的叙述，对振动问题、屈曲问题等是必须求固有值的。在结构力学中，在形成矩阵时根据互等定理，大多数的矩阵是"对称矩阵"，故这里就求对称矩阵的固有值进行说明。其中最基本的方法是雅可比法。其原理是将矩阵的非对角项反复通过坐标变换逐一变为 0，这是基于矩阵的固有值不随坐标变换而变化(固有向量是变化的)的原理。在反复进行坐标变换时，已变为 0 的其它非对角项可能再度变为非 0，这正是本方法的难点①。由于可证明在反复计算中非对角项是逐渐收敛于 0 的，故只要不嫌计算的烦琐，则本法是一个非常稳定的并适合于计算机求解的方法。其步骤为

(1) 将各非对角项的值取平方并求它们的和($=H$)，确定阀值 B。

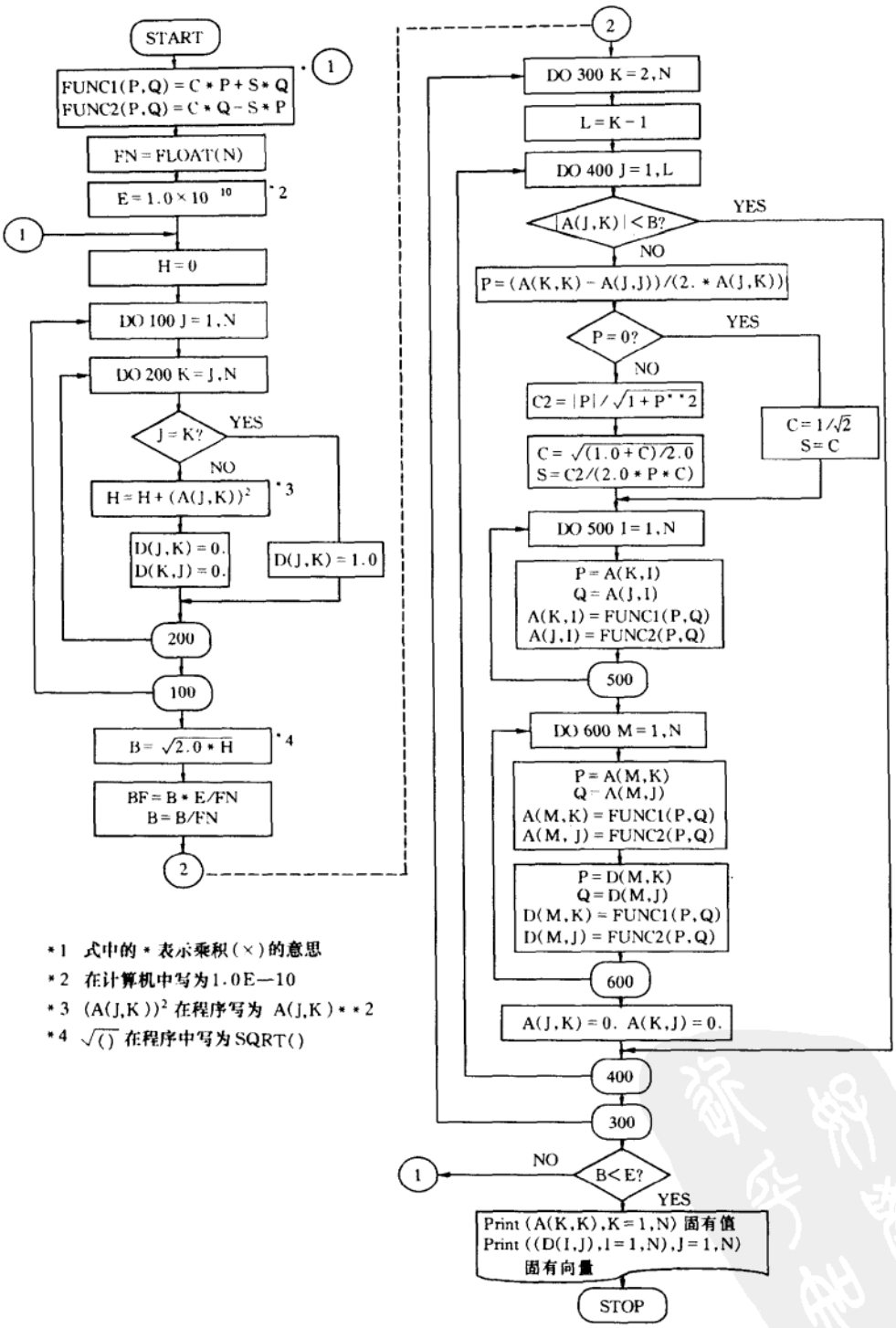
(2) 从 B 开始将绝对值大的非对角项通过坐标变换变为 0。此时，往往已变成了 0 的项再次变为非 0 的值。

(3) 当阀值 B 已很小属于误差容许范围内时则停止计算。当不满足误差要求，则重复(1)，(2)，(3)的计算步骤。

在第(2)步中，为使非对角项 a_{jk}(程序中为 A(J,K))为 0，进行以下的坐标变换：

首先取坐标变换的矩阵$[R^{jk}]$如下(R 的上标 jk 只是标记而已)

① 例如吉文斯-豪斯霍德法就是对已变为 0 的项一直作为 0 保存下去。



*1 式中的 * 表示乘积(×)的意思

*2 在计算机中写为1.0E—10

*3 $(A(J,K))^2$ 在程序写为 A(J,K) * * 2

*4 $\sqrt{()}$ 在程序中写为SQRT()

图 A5.5

$$[R^{jk}]=\begin{array}{c}\\ k\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 0 & \vdots & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \cdots & 0\\ 0 & & \vdots & 1 & 0 & & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{matrix}\\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{k\text{列}}\qquad\qquad\underbrace{\qquad}_{j\text{列}}\end{array}\tag{A5.11}$$

在 $\boldsymbol{A}$ 的前后乘以$[R^{jk}]$，即

$$[R^{jk}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}[R^{jk}]\rightarrow\boldsymbol{B}\tag{A5.12}$$

结果 $\boldsymbol{A}$ 的 k 行，j 行，k 列，j 列的元素均发生变化（$a_{ji}\rightarrow b_{ji}$）。

设 $\cos\theta\equiv C,\sin\theta\equiv S$

则元素变化的情况如下

$$\begin{aligned}
&a_{ji}\rightarrow b_{ji}=-Sa_{ki}+Ca_{ji}\\
&a_{mk}\rightarrow b_{mk}=Ca_{mk}+Sa_{mj}\\
&a_{mj}\rightarrow b_{mj}=-Sa_{mk}+Ca_{mj}\\
&a_{ki}\rightarrow b_{ki}=Ca_{ki}+Sa_{ji}\\
&a_{mi}\rightarrow b_{mi}=a_{mi}\\
&\qquad(k,j\text{以外的行，列的元素不变化})\\
&a_{kk}\rightarrow b_{kk}=C^2a_{kk}+S^2a_{jj}+2SCa_{jk}\\
&a_{jj}\rightarrow b_{jj}=S^2a_{kk}+C^2a_{jj}-2SCa_{jk}\\
&a_{jk}\rightarrow b_{jk}=SC(a_{kk}-a_{jj})+(C^2-S^2)a_{jk}
\end{aligned}\tag{A5.13}$$

坐标变换的目的是要使 a_{jk} 变为0，也是使 $b_{jk}=0$。因此

$$b_{jk}=-SC(a_{kk}-a_{jj})+(C^2-S^2)a_{jk}=0$$

所以 $$-\frac{1}{2}(a_{kk}-a_{jj})\sin2\theta+a_{jk}\cos2\theta=0$$

（因 $S\equiv\sin\theta,C\equiv\cos\theta$）

所以 $$\tan2\theta=\frac{a_{jk}}{\frac{1}{2}(a_{kk}-a_{jj})}\quad\left(\equiv\frac{1}{P}\right)$$

必须有

$$\left.\begin{aligned}
&\cos2\theta=\frac{|P|}{\sqrt{1+P^2}}(\equiv C_2)\\
&\cos\theta(\equiv C)=\sqrt{(1+C_2)/2.0}\\
&\sin\theta=C_2/(2.0\times P\times C)
\end{aligned}\right\}\tag{A5.14}$$

最后，可按以下顺序执行步骤(2)的计算：

(a) 用 a_{jk}，a_{kk}，a_{jj} 计算 P。

(b) 由 P 求出 $C(\equiv\cos\theta)$，$S(\equiv\sin\theta)$。

(c) 根据式(A5.12)用 C,S 变换 $\boldsymbol{A}$ 的元素。

雅可比法的程序如图 A5.5 所示。



附录 6 行列式

行列式仅对方阵 $\boldsymbol{A}(=a_{ij})$ 才能定义。

(1) 置换

将数列(3,2,1)变为顺序排列的数列(1,2,3)，需反复进行相邻两数之间的交换，共三次，即

第1次 第2次 第3次

$$(3,2,1)\rightarrow(3,1,2)\rightarrow(1,3,2)\rightarrow(1,2,3)\quad\text{(a)}$$

而将(2,3,1)变为(1,2,3)则需如下所示的二次变换

第1次 第2次

$$(2,3,1)\rightarrow(2,1,3)\rightarrow(1,2,3)\quad\text{(b)}$$

3为奇数，2为偶数，故将前者(a)称为奇变换而将后者(b)称为偶变换，约定奇变换标以负(−)号，偶变换标以正(+)号。即对变换(σ)，其符号定义为

$$\mathrm{sign}(\sigma)=\begin{cases}-1 & \text{奇变换}\\ +1 & \text{偶变换}\end{cases}$$

(2) 行列式

n 阶（大小为 $n\times n$）方阵 $\boldsymbol{A}=a_{ij}$，从其各行各列任意选择一个元素 a_{ij}，取它们的积 $a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{nv}$。此时，由于$(\alpha,\beta,\cdots,v)$一般不是按顺序排列的数列，考虑它们的置换次数并标以符号，即乘以 $\mathrm{sign}(\sigma)$。将所有不同的组合取积并相加所得的便是行列式。

$$\text{行列式}=|a_{ij}|=|A|=\det(a_{ij})=\sum\mathrm{sign}(\sigma)a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{nv}$$

例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(1,2)零次置换，(2,1)一次置换

可画成

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$-$ $+$

同时有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

当沿右下方取积时为正，沿左下方取积时为负(该积的符号规则仅适用 $n \leqslant 3$ 时的情况)。



附录 7 克莱姆法[①]

仅在节点作用有外力的桁架杆件中，由于假定杆件两端为铰接故在计算中仅产生轴力。当几个杆件集中于一个节点而节点处于静止状态，则表明作用在该节点的外力与各杆件的轴力处于平衡状态。若对这些力画出力多边形，则节点上的力多边形必然是闭合的。由于各轴力与各杆件的轴向是一致的，故轴力的方向也是已知的，因此当一个节点上有两个以下大小未知的轴力时，可根据力多边形求出这些力的大小。

克莱姆法是利用该力多边形，不需动脑筋也不易出错，即机械地求出桁架杆件内力的方法之一。一个节点上未知的轴力必须不超过两个的条件是比较严格的。一个节点上有时集中有几个杆件，反之有时未知轴力也许仅有一个，当然对此不必担心。若是静定桁架，可对一个节点上集中有几个杆件的情况求解(参照第 4 章的练习题 4.1)。此外，在节点上仅有一个大小未知但方向确定的未知轴力的情况在实际中是不存在的。

为进行克莱姆法机械式的计算，需作以下的准备(图 A7.1(a) ～ (h))：

1. 求出反力。为此使用力向量图和力多边形(图(a) ～ (c))。

2. 对被反力(包括外力) 和杆件分隔开的区域命名，如作 $A,B,C,\cdots$ 的编号(图(d))。

3. 在节点周围的区域中按顺时针方向画力多边形。例如，在图(d)中对节点 1(左侧支点) 按 $A \to E \to D \to A$ 的次序。与此相应的，在力多边形上可画出 $\vec{ae}$，$\vec{ed}$，$\vec{da}$，这三个力形成闭合的三角形(图(e))。$\vec{da}$ 是反力 R_1，$\vec{ae}$ 是杆件 1－3 的轴力，由于指向节点方向故是压力，$\vec{ed}$ 是杆件 1－4 的轴力由于指向远离节点的方向故是拉力(图(f) ～ (h))。

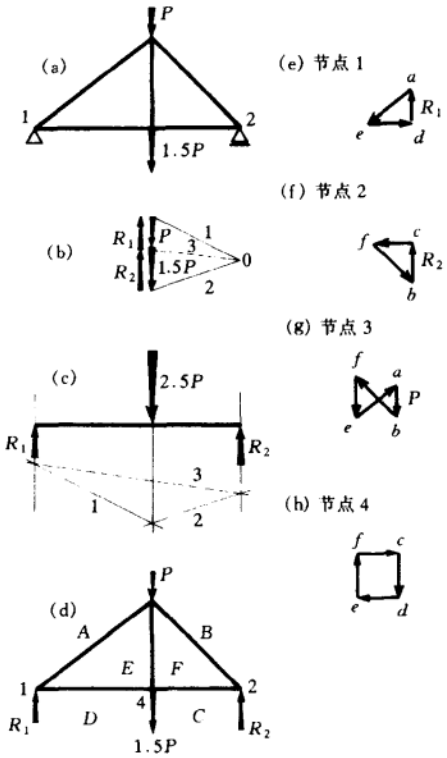


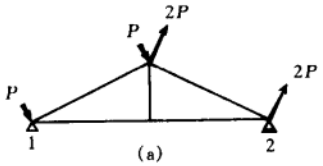
图 A7.1

4. 一般从支点出发，完成一个节点的力多边形后，再移向相邻的节点继续画出力多边形，顺次反复上述过程直至所有节点的力多边形画完为止。

[例题] 用克莱姆法求出图 A7.2(a)所示外力作用下的桁架的内力。

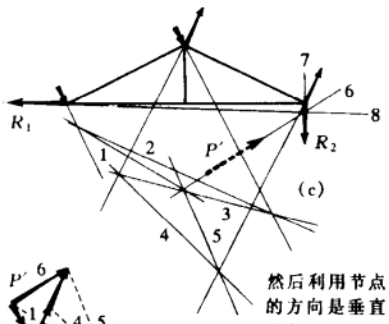
解 对两支座为铰接的情况，支承条件为一次超静定，往往是假定水平反力相等进行求解。本问题可理解为计算设计风荷载所引起的杆件内力。

① 过去克莱姆法作为分析求解桁架内力的简便方法被广泛地使用，现在由于可用小型计算机方便地求解，该法逐渐失去其实用价值。这里请作为了解常识来进行阅读。



(a)

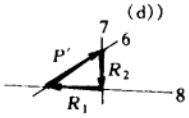
首先求出外力(除反力外)的合力 P'(图(b),(c))



(c)

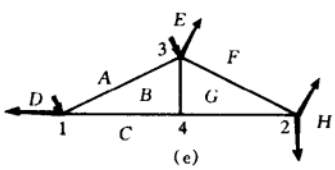
(b)

然后利用节点 2 的反力的方向是垂直的，求出节点 1,2 的反力(图(b),(d))



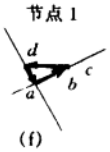
(d)

对被外力(包括反力)分割开的区域命名(图(e))，就各节点画出力多边形(图(f)～(i))，求出各杆件的内力



(e)

节点 1



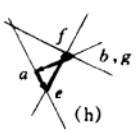
(f)

节点 2



(g)

节点 3



(h)

节点 4



(i)

图 A7.2



附录 8 平面刚架(静定、超静定)判别式的推导

再次给出平面刚架的判别式

$$f = m + r + \sum j - 2n \tag{4.1}$$

式中：

f —— 超静定的次数($f<0$ 为不稳定，$f=0$ 为静定，$f=i>0$ 为 i 次超静定)；

m —— 总杆件数；

r —— 总反力数；

j —— 各刚性节点上的刚接杆件数减 1；

n —— 总节点数(包括支座，自由端)。

对式(4.1)可作如下的推导。

首先，将杆件分类成：两端刚接(设杆件数为 m_r)，一端刚接一端铰接(设杆件数为 m_{rp})，两端铰接(设杆件数为 m_p)。$m = m_r + m_{rp} + m_p$。对两端刚接的杆件，其一端的杆端内力为 X,Y 方向的内力与弯矩，数量共计 3 个，两端为 6 个。一端刚接一端铰接的杆件为 5 个，两端铰接的杆件为 4 个。在求解刚架时，这些杆端内力与支座的反力(反力数为 r)是未知数，未知数的总和为

$$6m_r + 5m_{rp} + 4m_p + r \tag{A8.1}$$

另一方面，方程数为：一个杆件有 3 个，刚接点有 3 个(设刚接点数为 n_r)，铰接点有 2 个(设铰接点数为 n_p)。因此方程式总计有

$$3(m_r + m_{rp} + m_p) + 3n_r + 2n_p \tag{A8.2}$$

对静定的情况，由于未知数的总和(A8.1)与方程式的总数(A8.2)相等，$f = (A8.1) - (A8.2) = 0$。即

$$\begin{aligned} f &= 0 \\ &= 6m_r + 5m_{rp} + 4m_p + r - 3(m_r + m_{rp} + m_p) \\ &\quad - 3n_r - 2n_p \end{aligned}$$

设

$$n = n_r + n_p$$

$$\sum j \equiv 2m_r + m_p - n_r$$

利用

$$m = m_r + m_{rp} + m_p$$

可得下式

$$f = m + r + \sum j - 2n \qquad (\text{前文 } 4.1)$$

由于 $2m_r + m_p$ 为杆端力矩的总数，n_r 为节点力矩平

衡式个数，故 $\sum j$ 为仅用节点力矩平衡式无法处理的杆端力矩数。例如，1 个刚节点上有 3 根杆件，则 3 根杆件的杆端力矩 M_1、M_2、M_3 是未知数，而方程式仅有 $\sum M = 0$ 的 1 个，故 $j = 2$。这样便得到 j 的定义："各刚性节点上的刚接杆件数减 1"。



附录 9 希腊字母

附表 A9.1 希腊字母(经常作为数学符号使用)

大写	小写	读法	对应的罗马字
Α	α	alpha	A
Β	β	beta	B
Γ	γ	gamma	G
Δ	δ	delta	D
Ε	ε	epsilon	短音的 E
Ζ	ζ	zeta	Z
Η	η	eta	长音的 E
Θ	θ	theta	TH
Ι	ι	iota	I
Κ	κ	kappa	K
Λ	λ	lambda	L
Μ	μ	mu	M
Ν	ν	nu	N
Ξ	ξ	xi	X
Ο	ο	omi-cron	短音的 O
Π	π	pi	P
Ρ	ρ	rho	R
Σ	σ	sigma	S
Τ	τ	tau	T
Υ	υ	upsilon	Y
Φ	φ	phi	F
Χ	χ	chi	CH
Ψ	ψ	psi	PS
Ω	ω	omega	长音的 O

练习题答案

第 1 章练习题答案

1.1 i) $P = p(r/R)$，ii) 能量的大小相等。

根据力矩的平衡有 $rp = RP$，因此

$$P = p(r/R) < p(\text{因为 } r/R < 1)$$

同时，设转角为 θ，功 w，W 分别为

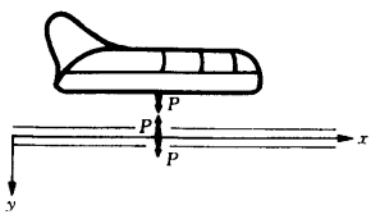
$$w = -r\theta \cdot p,\ W = R\theta \cdot P$$

故

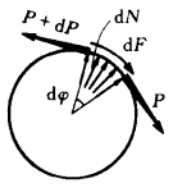
$$-w = W$$

因此，使用卷扬机可用较小的力 P 提起较大的重物 p，但它们所做的功、即 w，W 的大小是相等的。

1.2 [答案] 不正确。在车体上作用有垂直向下的重力 P(正确地说应是重力 − 空气的浮力)，而磁力和空气的升力方向相反，故车体在垂直方向处于力的平衡状态。另一方面，磁力和升力的反作用力(即 P)作用在地面上，随着车体的移动 P 也移动，地面产生振动。只是与直接在轨道上行驶的电车相比，车体上下移动小且空气起到缓冲作用，故对周围的影响也小。本题表明，即使物体之间不接触但力仍可以切实地得到传递。



1.3 可建立微分方程求解。绕在圆柱上绳子的一端用力 P 张拉后，绳子被压紧在圆柱上产生了摩擦力 dF，正是有了它才可能用 P 来抵抗更大的力 $P + dP$。根据绳子中力的平衡(圆柱与滑车相同，可认为各力的大小相等仅方向改变)



$$P + dP - (P + dF)\cos d\varphi = 0$$

$d\varphi \approx 0$ 即 $\cos d\varphi = 1$

所以
$$dP = dF \tag{1}$$

在法线方向的力平衡为

$$P\sin d\varphi = dN$$

$d\varphi \approx 0$ 即 $\sin d\varphi = d\varphi$

所以
$$Pd\varphi = dN \tag{2}$$

设摩擦系数为 μ，

$$dF = \mu dN \tag{3}$$

根据式(1)、(2)、(3)，有

$$\frac{dP}{P} = \mu d\varphi \tag{4}$$

式(4)为微分方程，两边积分，有

$$\log|P| = \mu\varphi + C_1 \quad (C_1 \text{ 是积分常数}) \tag{5}$$

将式(5)改写为

$$P = C'e^{\mu\varphi} \tag{6}$$

将 $\varphi = 0$ 时的 P 设为 P_0，$C' = P_0$

所以
$$P = P_0 e^{\mu\varphi} \tag{8}$$

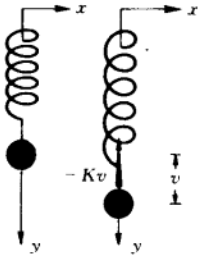
例如，$\mu = 0.35$，$\varphi = 2\pi$(绕一圈)时，有 $P = P_0 e^{0.35\times 2\pi} \approx 9.0P_0$，即可支撑约 9 倍的力。在港湾中栓船时，将缆绳绕在桩上就是利用了该原理。绕二圈可支撑约 $9^2(=81)$ 倍的力，绕三圈可支撑约 $9^3(\approx 730)$ 倍的力。

1.4 曲率 $= 1/\rho = f''(x)/\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}$

推导的方法在附录 2“微分 - 积分”中有记载。

1.5 $md^2v/dt^2 + Kv = 0$

在建立运动方程式时，固定某一瞬间的运动来进行考虑是方便的。取如图所示的坐标轴，设弹簧的伸长为 v，根据虎克定律，重物（质量 m）受的力为 $-Kv$。由于重力与该运动无关，故可不考虑。作用在重物上的力仅有 $-Kv$，故力的平衡不成立。因此可根据达朗贝尔原理进行处理，即加上惯性力 $-ma\left(=-m\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}t^2\right)$，然后令运动中的物体满足力平衡条件。



$$-Kv-ma=0$$

由此可得

$$m\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+Kv=0$$



第 2 章练习题答案

2.1 （有各种答案可考虑，下面只是其中的一例）

建设的目的和条件

1. 目的：自家居住用

2. 条件：

· 人员构成：根据核心家族、几代同居、兼作宿舍等不同的用途，建筑物的规模、结构和建设费用等也不同。

· 区域：气象条件、灾害的危险性具有很强的区域性，还有规范上的差异（雪荷载、地震力等）。

· 环境－建设场地：根据地区和道路宽度等而不同，与日照、火灾有关，与建筑物的高度、建筑面积与建设场地之比、建筑物耐火种类的规定有关，并受场地的地基条件所要求的结构上的限制。例如，软弱地基上的钢筋混凝土小住宅，由于基础费用过高故是不经济的。

· 规模：若为核心家庭居住或与老人同居，则多为 100 ～ 120 m^2，随着生活水准的提高，建筑物的居住面积有增大的趋势。

· 层数：在城市及其周围的住宅区中建设场地面积呈减少的趋势，并向耐火及高层方向发展。但是为了日照要求高度受到限制。

· 造价：结构与装修的好坏对造价的影响很大。结构、设备、装修约分别各占造价的 1/3。

· 使用年限：随装修、管理的好坏有很大变化，大致的标准可认为：木结构 30 年，钢结构 50 年，钢筋混凝土结构 70 年。

基本规划

1. 安全：轻的结构（木结构、钢结构）抗风弱但抗震强。钢筋混凝土结构若剪力墙较多则重量大但抗震好。荷载宜取使用年限约二倍的年份中灾害回归的荷载。例如，钢筋混凝土结构为 $70\times3=210$（年），即需考虑对 200 年一遇较强地震房屋不倒塌。

2. 功能：在功能方面，若剪力墙少则可自由地分割房间，空间的配置容易适应将来家族构成的变化，但这是与结构的要求相矛盾。因此剪力墙应考虑上述的矛盾而根据需要来配置。由于机械设备的急速变化与发展，建筑也应与之对应并考虑留有余地。

3. 经济：采用与建设场地条件不相适应的结构或采用特殊施工方法等将增加建设费用。同时应避免使用附近难以得到的特殊材料。

4. 造型：应采用标准的施工方法、材料、尺寸等，并将住宅设计成与气象、环境相适应，有个性的建筑。

结构规划

1. 结构的概要：结构的形态随不同的结构，如木结构、钢筋混凝土结构等而大不相同。钢结构与砖石结构（砖结构、砌体结构）的住宅较少。由于住宅中一个房间的尺寸较小，柱的间距也有限，故应采用合理的结构。过去的标准尺寸 ——1.8 m 模数的概念在住宅中仍有影响，在建筑模具、家具等中还在使用，故柱距常取 1.8 m 的倍数。在平面布置上，柱中心应通过方格状柱网的交点，这在结构上的传力是明确的。对木结构，日本式小屋柱距较小，西洋式小屋柱距较大。对钢筋混凝土结构可将屋顶作为露天使用。

2.2 设竖直杆的截面积为 $A(\mathrm{cm}^2)$，应力达到 $\sigma_u(\mathrm{kgf/cm}^2)$ 时的长度为 $L(\mathrm{cm})$，则有

$$LA\rho\times10^{-3}=\sigma_uA \qquad \text{所以} \quad L=\frac{\sigma_u}{\rho}\times10^3$$

此时的应变为

$$\varepsilon_u=\frac{\sigma_u}{E}$$

设伸长为 δ_u，则

$$\frac{\delta_u}{L}=\varepsilon_u \qquad \text{所以} \quad \delta_u=l\varepsilon_u=\frac{L\sigma_u}{E}$$

因此，各种材料的答案为

（a）钢

$\sigma_u = 4.4 \times 10^3 (\text{kgf/cm}^2), \rho = 7.85, E = 2.1 \times 10^6 (\text{kgf/cm}^2)$

$L = 5.61 \times 10^5 (\text{cm}) = 5.61(\text{km})$

$\delta_u = 1\ 174(\text{cm}) = 11.7(\text{m})$

(b) 混凝土

$\sigma_u = 30.0, \rho = 2.3, E = 2.1 \times 10^5$

$L = 13\ 043(\text{cm}) = 130.4(\text{m})$

$\delta_u = 1.86(\text{cm})$

(c) 黑松

$\sigma_u = 700.0, \rho = 0.4, E = 0.8 \times 10^5$

$L = 1.75 \times 10^6 (\text{cm}) = 17.5(\text{km})$

$\delta_u = 15\ 313(\text{cm}) = 153(\text{m})$

(d) 铝

$\sigma_u = 1\ 000.0, \rho = 2.7, E = 7.0 \times 10^5$

$L = 3.70 \times 10^5 (\text{cm}) = 3.7(\text{km})$

$\delta_u = 529.1(\text{cm}) = 5.3(\text{m})$

2.3 答案参照图解 2.3。

2.4 设建筑物的强度为 R，荷载为 S。将它们用平均值为 μ_r、标准偏差为 σ_r 的正态分布的概率变量 $X = N(\mu_r, \sigma_r)$ 来表示，有

$$R = N(A, a),\ S = N(B, b)$$

设 $Z = R - S$，荷载超过建筑物强度的概率 $f_z(x)$ 为 Z 的概率密度函数

$$P(Z < 0) = \int_{-\infty}^{0} f_z(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

由于 R, S 均为正态分布，故 Z 也为正态分布

$$Z = N(A - B, \sqrt{a^2 + b^2}) \tag{2}$$

因此，根据式(1)、(2)有

$$P(Z < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_z}{\sigma_z}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

式中，$\mu_z = A - B, \sigma_z = \sqrt{a^2 + b^2}$ (3)

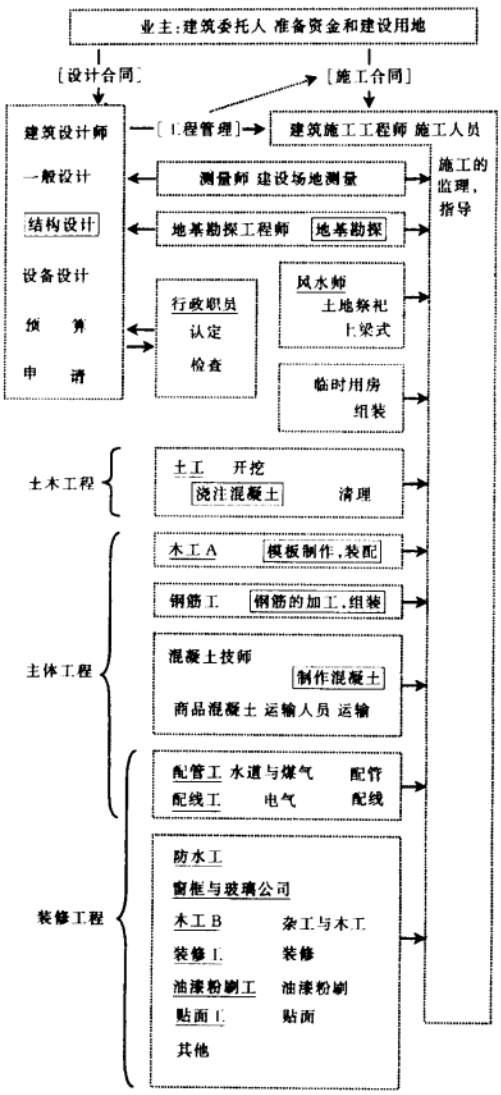
对式(3)作 $y = \frac{x - \mu_z}{\sigma_z}$ 的变量变换，则可用平均值为0、标准偏差为1的正态分布函数 $\Phi(y)$ 来表示

$$P(Z < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\mu_z}{\sigma_z}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$= \Phi\left(-\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right)$$

当给出 y 时可用数表进行计算。

因此，使用 $A = 1.5B, a = 0.8b$ 等的关系，可得荷载超过建筑物强度的概率 P_f 为



图解 2.3

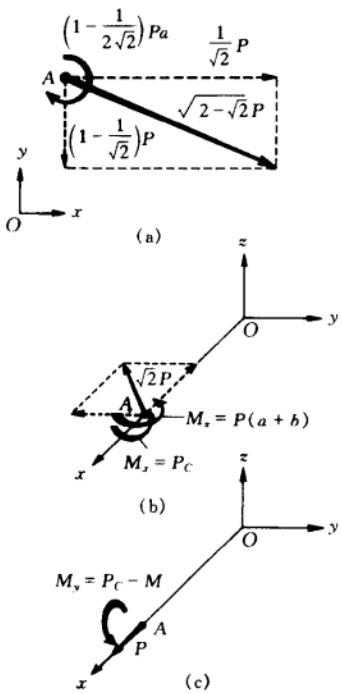
$$P_f = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{A - B}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

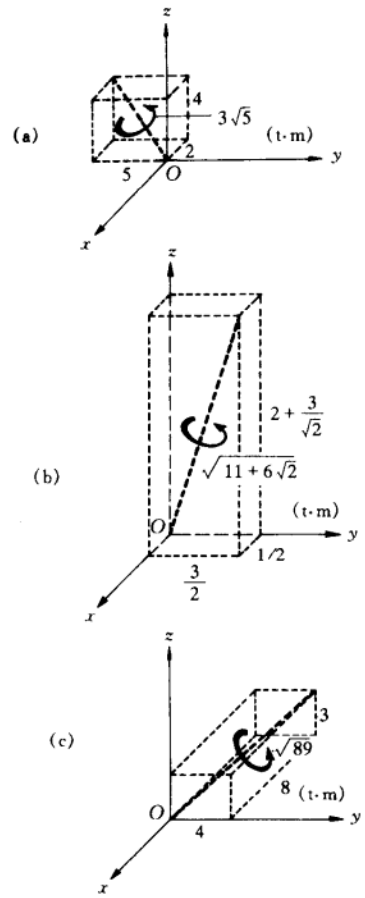
$$= 1 - \Phi\left(\frac{0.390B}{b}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.208A}{a}\right)$$



第 3 章练习题答案

3.1 图解 3.1



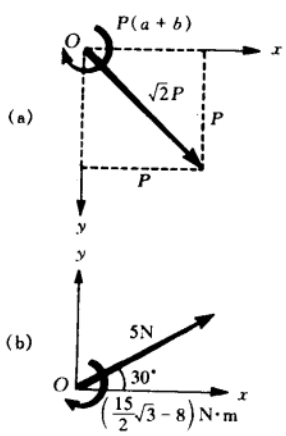


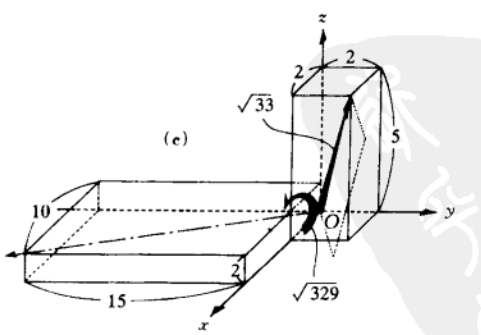
图解 3.1

图解 3.2

3.2 图解 3.2

3.3 图解 3.3



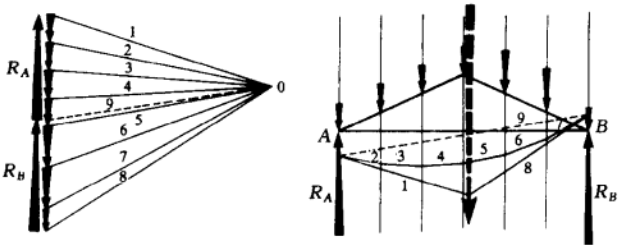


图解 3.3

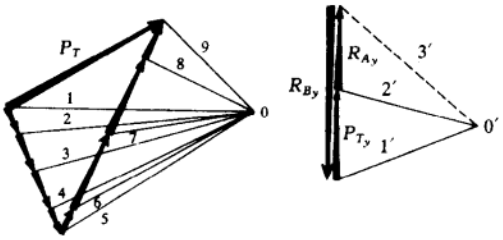
3.4

(a) 首先，求出外力的合力 P_T，然后根据与 P_T 的平衡求出 R_A，R_B。由于外力的水平分量为零，根据问题的条件，A，B 点的水平反力为零，A，B 点上仅作用有

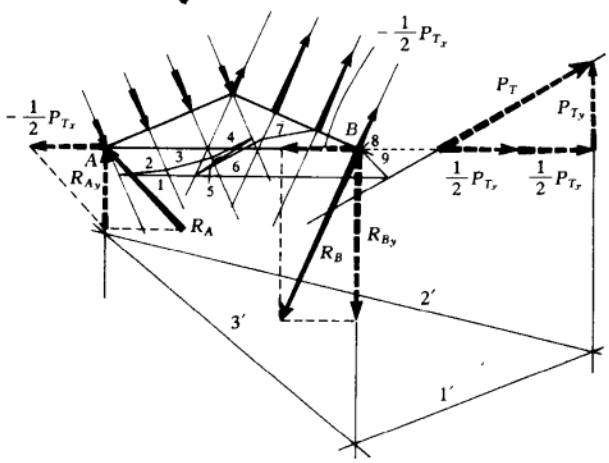
(a)

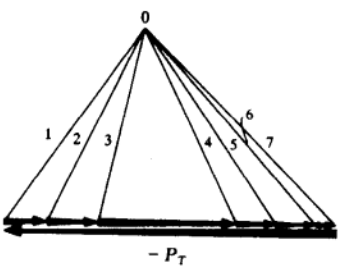


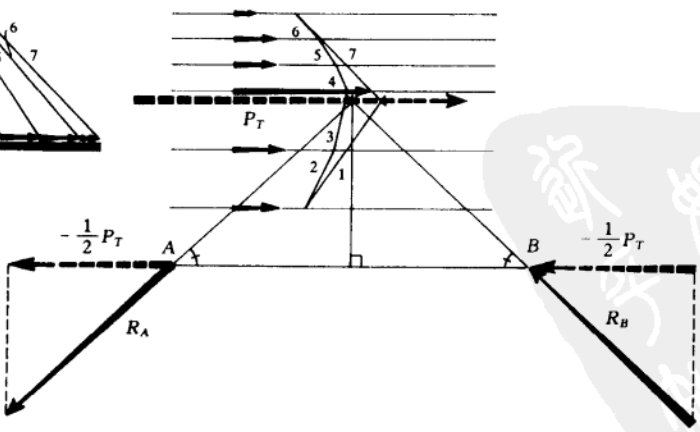
(b)



(c)







垂直反力。

(b) 首先，求出不包括支座反力的外力合力 P_T，然后根据与该合力的平衡求出支座反力。

根据支座 A，B 各承担 P_T 的 x 分量的 1/2，确定 R_A，R_B 的 x 分量。由直线 AB 与 P_T 作用线的交点得到 P_T 的作用点，考虑到 P_T 的 y 分量与 R_A，R_B 的垂直分量保持平衡，可求得 R_A，R_B 的垂直分量。

(c) 根据框架的对称性与荷载的反对称性，R_A 与 R_B 为反对称。因此，R_A 与 R_B 的作用线的交点位于 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上，且与外力的合力 P_T 相交。

3.5 设杆的截面积为 A。根据(a)的结果和 $\sigma = E\varepsilon$ 的关系，有

$$\frac{1}{A} = E\frac{0.1}{20} \qquad \text{所以} \quad E = \frac{200}{A}(\text{N/cm}^2)$$

同时，由弹簧常数 K 的关系 $F = Kx$，根据(b)的结果得

$$1 = K(1.0 - 0.1) \qquad \text{所以} \quad K = 10/9(\text{N/cm})$$

在(c)的情况下，杆的伸长为 0.1 cm。弹簧部分的伸长为

$$\frac{1}{K} \times 2 + \frac{1}{2K} = 2.25 \text{ cm},$$

故总体的伸长为

$$2.25 + 0.01 = 2.35 \text{ cm}$$

3.6 根据 $F = K\delta$，弹簧的伸长为

$$\delta = \frac{F}{K} = \frac{10}{1.0 \times 10^3} = 0.01 \text{ cm}$$

设杆的截面积为 A，由 $\sigma = E\varepsilon$ 关系，对同样的伸长 δ 有

$$\frac{10}{A} = E\frac{\delta}{20}$$

所以

$$A = \frac{10 \times 20}{E\delta} = \frac{200}{2.0 \times 10^3 \times 0.01} = 10(\text{cm}^2)$$

设直径为 l 时，有

$$10 = \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad \text{所以} \quad l = 3.57 \text{ cm}$$

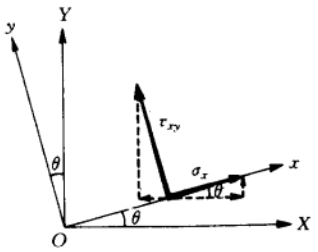
当 W(kg) 的重物吊在圆杆下时应力为

$$\sigma = W/A = W/10(\text{kg/cm}^2)$$

故圆杆必须的强度应大于 $W/10(\text{kg/cm}^2)$。

3.7

设总体的应力为 σ_X，τ_{XY}，由图可得



$$\sigma_X = \sigma_x\cos\theta - \tau_{xy}\sin\theta$$

$$\tau_{XY} = \sigma_x\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta$$

改写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\sigma_X \\ \tau_{XY}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x \\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$$

3.8 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.0}{1.0 \times 10^2}} = 0.281 \text{ s}$

3.9 根据 $\sigma = E\varepsilon$，可得

$$P/A(x) = E\varepsilon \qquad \text{所以} \quad \varepsilon = \frac{P}{EA(x)}$$

$\mathrm{d}x$ 部分的伸长为

$$\varepsilon\mathrm{d}x = \frac{P}{EA(x)}\mathrm{d}x$$

所以 $u_x = \int_0^x \varepsilon\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{P}{EA(x)}\mathrm{d}x = \frac{P}{E}\int_0^x \frac{1}{A(x)}\mathrm{d}x$

3.10 设钢筋所承担的力为 P_s，混凝土所承担的力为 P_c，则有

$$P_s + P_c = P \tag{1}$$

由于钢筋与混凝土的变形是一样的，故

$$\frac{P_sL}{A_sE_s} = \frac{P_cL}{A_cE_c} \tag{2}$$

由式(1)、(2)可得

$$P_s = \frac{A_sE_s}{A_sE_s + A_cE_c}P$$

$$P_c = \frac{A_cE_c}{A_sE_s + A_cE_c}P$$

因此，钢筋与混凝土的应力分别为

$$\sigma_s = \frac{E_s}{A_sE_s + A_cE_c}P$$

$$\sigma_c = \frac{E_c}{A_sE_s + A_cE_c}P$$

3.11 根据上一问题的结果，钢管承担的力为

$$P_s = \frac{A_s E_s}{A_s E_s + A_c E_c} P$$

而缩短量为

$$\delta = \frac{P_s L}{A_s E_s}$$

将 $E_s = 2.0 \times 10^6\ \text{kg/cm}^2$

$E_c = 2.0 \times 10^5\ \text{kg/cm}^2$

$A_c = \pi \times 18^2 = 1\,017.9\ \text{cm}^2$

$A_s = \pi \times 10^2 - A_c = 238.8\ \text{cm}^2$

$P = 10.0 \times 10^3\ \text{kg}, L = 400.0\ \text{cm}$

代入后得

$$P_s = 7\,011.4\ \text{kg}, \delta = 5.87 \times 10^{-3}\ \text{cm}$$

3.12 由于是复合材料，钢与铝的应变应相同，即在屈服范围内，有

$$\epsilon = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_a}{E_a}$$

式中，$E_s = \frac{\sigma_{ys}}{\epsilon_{ys}}$，$E_a = \frac{\sigma_{ya}}{\epsilon_{ya}}$。

根据给出的钢与铝的变形特性，铝首先屈服。设此时的荷载为 P_1，

$$P_1 = \sigma_{ya} A_a + \sigma_s A_s = \left(A_a + \frac{E_s}{E_a} A_s\right) \sigma_{ya}$$

当 P 超过了 P_1，则铝没有承担 $\sigma_{ya} A_a$ 以上荷载的能力，而由钢来承担此后荷载的增加部分。设钢屈服时的荷载为 P_2

$$P_2 = \sigma_{ya} A_a + \sigma_{ys} A_s$$

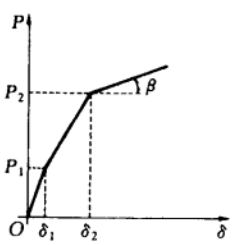
当荷载 P 超过了 P_2，根据给出的钢的变形特性，钢的弹性模量为 $\tan\alpha$。

因此

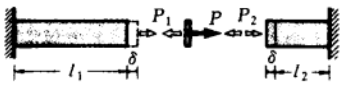
$$P = P_2 + \frac{(\delta - \delta_2)}{l} \tan\alpha \cdot A_s = P_2 + (\delta - \delta_2) \tan\beta$$

式中，$\tan\beta = \frac{A_s}{l} \tan\alpha$。

P 与 δ 的关系如右图所示，其中的 $\delta_1 = \epsilon_{ya} l$，$\delta_2 = \epsilon_{ys} l$



3.13 在外力作用点附近切开截面，考虑力的平衡及力与变形的关系，有



$$P_1 + P_2 = P$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = E \frac{\delta}{l_1} = E\epsilon_1$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = E \frac{\delta}{l_2} = E\epsilon_2$$

求解 δ，可得

$$\delta = \frac{P}{AE} \cdot \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$$

由此，应变与应力分别为

$$\epsilon_1 = \frac{\delta}{l_1} = \frac{P}{AE} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2},\ \epsilon_2 = \frac{P}{AE} \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2},\ \sigma_2 = \frac{P}{A} \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

3.14 当没有弹簧时，由于热膨胀引起梁的伸长为 $\alpha T l$。但实际上由于弹簧反力 P 的作用并不能自由变形，结果只伸长了 δ。此时，弹簧力与变形的关系为 $P = k\delta$，梁的力与变形的关系可表示为

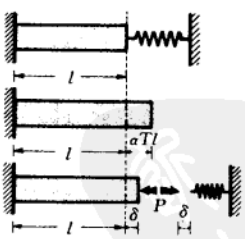
$$\sigma = \frac{P}{A} = E\epsilon = E \frac{\alpha T l - \delta}{(1 + \alpha T) l}$$

未知数为 P, δ，就 δ 求解，可得

$$\delta = \frac{\alpha T l E A}{(1 + \alpha T) k l + E A}$$

因此，梁的应力为

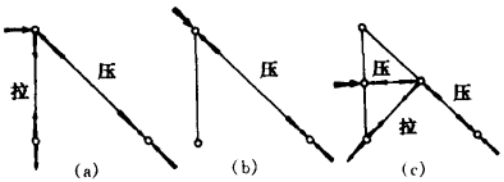
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{k\delta}{A} = \frac{\alpha T l k E}{(1 + \alpha T) k l + E A}$$



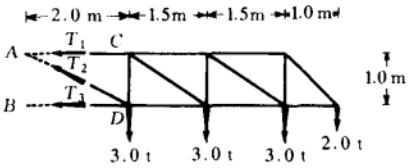


第 4 章练习题答案

4.1



4.2



$$\sum M_A = T_3 \times 1 + 3 \times (2 + 3.5 + 5) + 2 \times 6 = 0$$

所以　　$T_3 = -43.5$ t　(压力)

$$\sum M_D = -T_1 \times 1 + 3 \times (1.5 + 3) + 2 \times 4 = 0$$

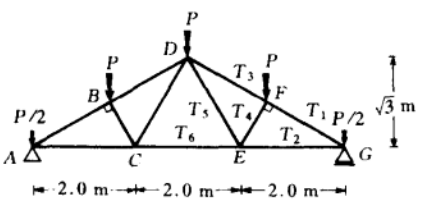
所以　　$T_1 = 21.5$ t　(拉力)

根据水平力的平衡，有

$$T_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} T_2 + T_3 = 0$$

所以　　$T_2 = 11\sqrt{5}$t　(拉力)

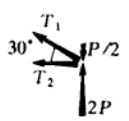
4.3　用节点法求解的示例。



假定各节点中产生的内力如图所示，均设为拉力。

考虑各节点的平衡

(节点 G)



$$T_1 \sin 30° - \frac{1}{2}P + 2P = 0$$

$$T_1 \cos 30° + T_2 = 0$$

所以

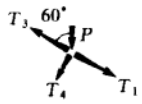
$$T_1 = -3P$$

$$T_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}P$$

(节点 F)

$$-P + T_3 \cos 60° - T_1 \sin 30° - T_4 \cos 30° = 0$$

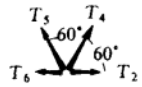
$$T_3 \sin 60° + T_4 \cos 60° - T_1 \cos 30° = 0$$



所以　　$T_3 = -\frac{5}{2}P$

$$T_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}P \text{(杆件 } EF\text{)}$$

(节点 E)



$$T_5 \sin 60° + T_4 \sin 60° = 0$$

$$T_6 + T_5 \cos 60° - T_4 \cos 60° - T_2 = 0$$

所以　　$T_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$(杆件 DE)

$$T_6 = \sqrt{3}P$$

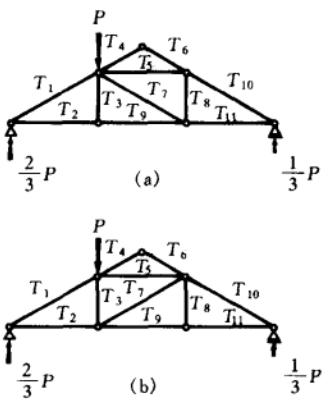
当 $P = 6t$ 时，杆件 EF，DE 的内力如下。

$$T_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = -5.2\ (t)$$

$$T_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 5.2\ (t)$$

4.4　根据 $m = 10$，$r = 3$，$n = 7$ 可得超静定次数为：$f = 10 + 3 - 7 \times 2 = -1$，故该桁架是不稳定的。

当桁架仅由三角形单元构成时，由于它是稳定的，故可采用如图所示的两种方法加上一根斜杆，这些方法是经济且稳定的。



图(a)，(b)情况下各杆件的内力如下：

(a)，(b)中内力相同的杆件为

$$T_1 = -\frac{4}{3}P,\ T_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}P,\ T_{10} = -\frac{2}{3}P$$

$$T_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}P,\ T_4 = 0,\ T_6 = 0$$

(a)，(b)中内力不同的杆件为

$$T_3(a) = 0,\ T_3(b) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}P,\ T_8(a) = \frac{1}{3}P$$

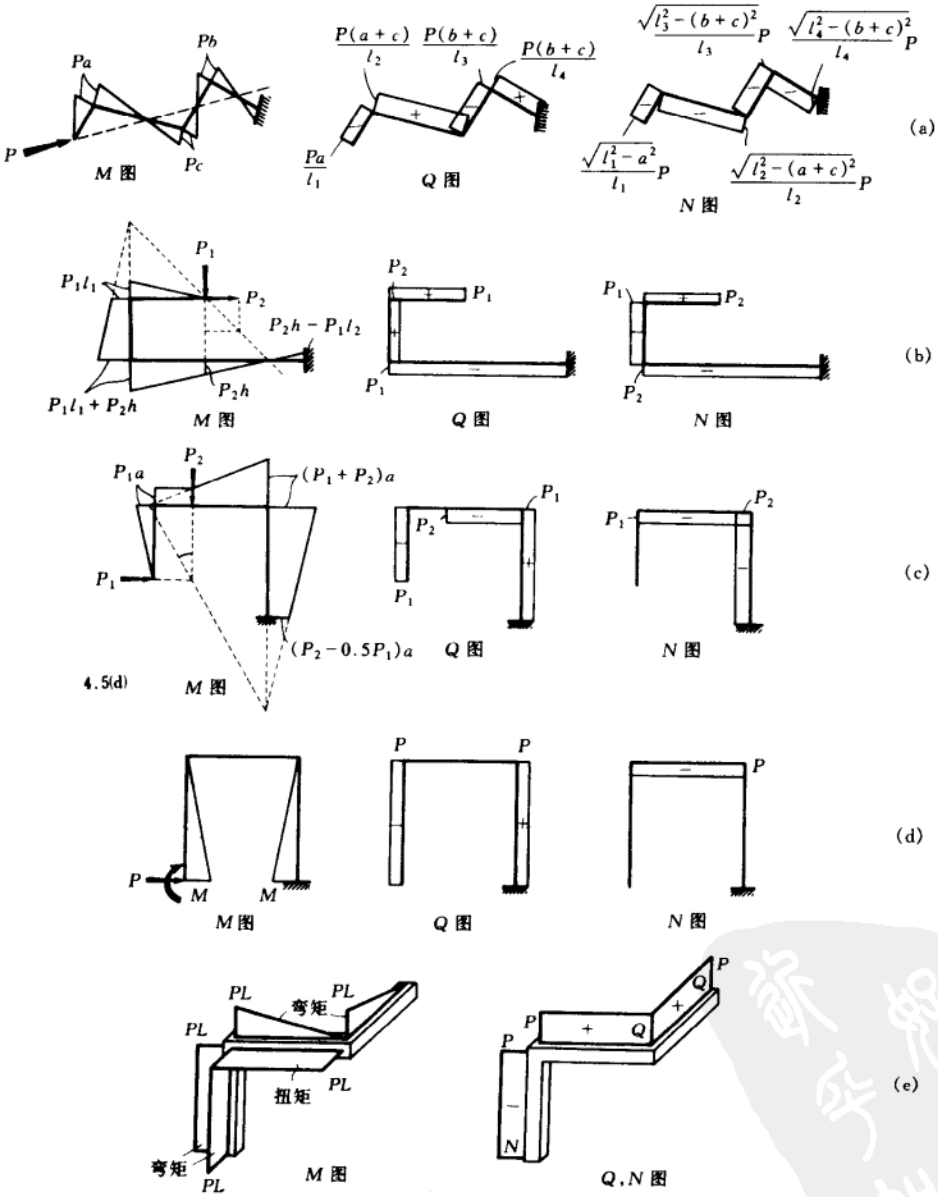
$$T_8(b) = 0,\ T_7(a) = -\frac{2}{3}P,\ T_7(b) = \frac{2}{3}P,$$

$$T_9(a)=\frac{2}{3}\sqrt{3}P,\ T_9(b)=\frac{\sqrt{3}}{3}P,$$

$$T_5(a)=-\frac{\sqrt{3}}{3}P,\ T_5(b)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}P$$

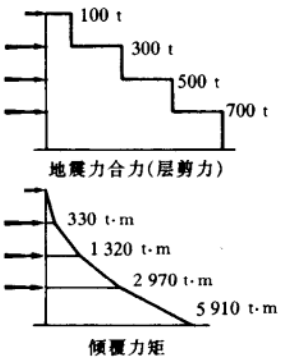
在图(a)中新加入的斜杆为受压杆件，在图(b)中新加入的斜杆为受拉杆件。考虑到材料的容许应力与屈曲等条件，可认为图(b)是最合适的。

4.5 图解 4.5



图解 4.5

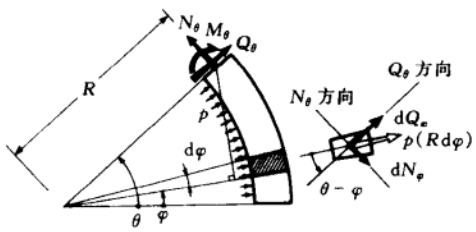
4.6　只要求出将建筑物简化成悬臂梁时的 Q,M 图即可。在建筑物底部产生的倾覆力矩为 5 910 t·m。



4.7　设角度为 θ 的截面内力为 N_θ,Q_θ,M_θ。作用在 $R\mathrm{d}\varphi$ 的微元体上的力在 N_θ,Q_θ 方向的分量为

$$\mathrm{d}N_\varphi = -p(R\mathrm{d}\varphi)\sin(\theta-\varphi)$$

$$\mathrm{d}Q_\varphi = p(R\mathrm{d}\varphi)\cos(\theta-\varphi)$$



沿 N_θ,Q_θ 方向及力矩的平衡条件为

$$N_\theta + \int_0^\theta \mathrm{d}N_\varphi = 0$$

$$Q_\theta + \int_0^\theta \mathrm{d}Q_\varphi = 0$$

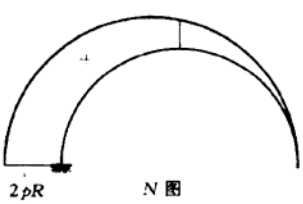
$$M_\theta - \int_0^\theta p(R\mathrm{d}\varphi)R\sin(\theta-\varphi) = 0$$

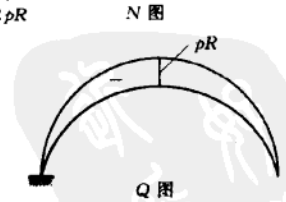
积分后可得

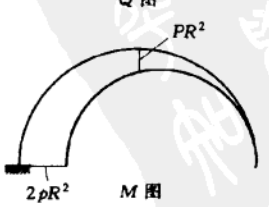
$$N_\theta = pR(1-\cos\theta)$$

$$Q_\theta = -pR\sin\theta$$

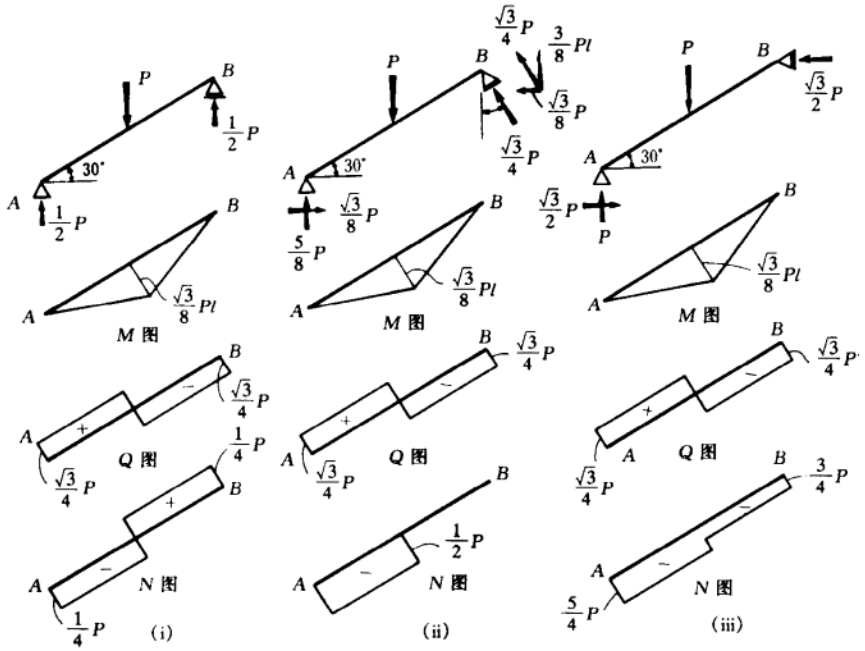
$$M_\theta = pR^2(1-\cos\theta)$$



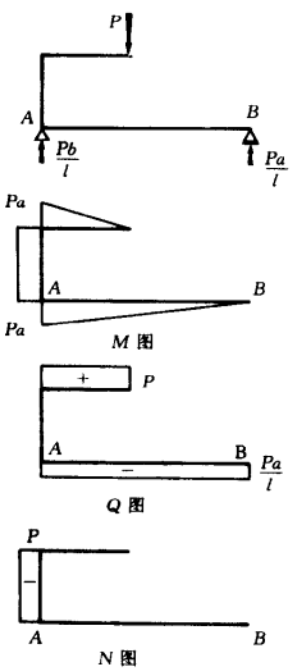




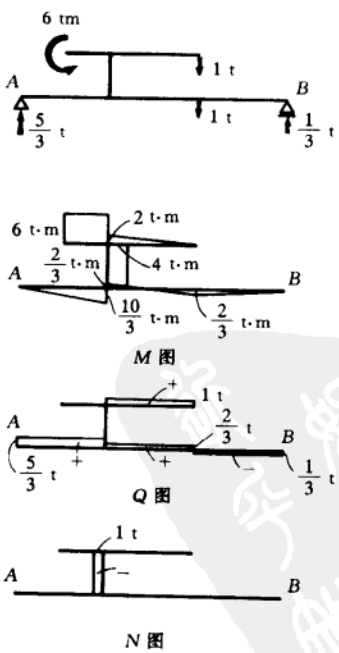
4.8 (a)


P
B
A
30°
$\frac{1}{2}P$
$\frac{\sqrt{3}}{8}Pl$
M 图
$\frac{\sqrt{3}}{4}P$
$\frac{3}{8}Pl$
$\frac{\sqrt{3}}{8}P$
$\frac{5}{8}P$
Q 图
$\frac{1}{4}P$
N 图
(i)
(ii)
$\frac{\sqrt{3}}{2}P$
(iii)

4.8 (b)


P
A
B
$\frac{Pb}{l}$
$\frac{Pa}{l}$
Pa
M 图
Q 图
N 图

4.8 (c)

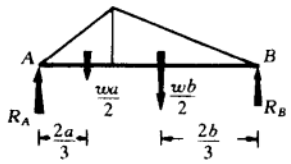

6 tm
1 t
A
B
$\frac{5}{3}$ t
$\frac{1}{3}$ t
6 t·m
2 t·m
$\frac{2}{3}$ t·m
4 t·m
$\frac{10}{3}$ t·m
M 图
Q 图
N 图

4.8 (d)

(1) 反力

$$R_A = \frac{a+2b}{6}w$$

$$R_B = \frac{2a+b}{6}w$$



(2) $0 \leqslant x < a$：切开后考虑力的平衡，有

$$M(x) + R_A x - \frac{wx^2}{2a} \cdot \frac{x}{3} = 0$$

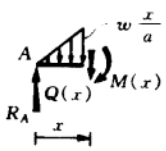
$$Q(x) - R_A + \frac{wx^2}{2a} = 0$$

因此

$$M(x) = -\frac{(a+2b)w}{6}x + \frac{w}{6a}x^3$$

$$Q(x) = \frac{(a+2b)w}{6} - \frac{w}{2a}x^2$$

$$N(x) = 0$$



(3) $a \leqslant x \leqslant a+b$：考虑切开后右侧部分的力的平衡，有

$$-M(x) - R_B(a+b-x) + \frac{w(a+b-x)^2}{2b} \cdot \frac{(a+b-x)}{3} = 0$$

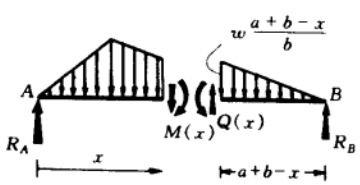
$$-Q(x) - R_B + \frac{w(a+b-x)^2}{2b} = 0$$

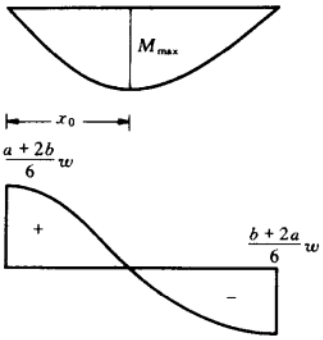
代入(1)的结果，可得

$$M(x) = -\left[\frac{(2a+b)(a+b-x)}{6} - \frac{(a+b-x)^3}{6b}\right]w$$

$$Q(x) = -\left[\frac{2a+b}{6} - \frac{(a+b-x)^3}{2b}\right]w$$

$$N(x) = 0$$

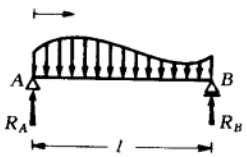




$$M_{max} = \begin{cases} \frac{w}{9\sqrt{3}}\sqrt{b(b+2a)^3}; & a < b \\ \frac{w}{9\sqrt{3}}\sqrt{a(a+2b)^3}; & a > b \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{cases} a+b-\sqrt{b(b+2a)/3}; & a < b \\ \sqrt{a(a+2b)/3} & ;a > b \end{cases}$$

4.9



对 B 点取矩，有

$$R_A l = \int_0^l f(x)(l-x)\mathrm{d}x$$

所以

$$R_A = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)(l-x)\mathrm{d}x$$

同样，对 A 点取矩，有

$$R_B = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)x\mathrm{d}x$$

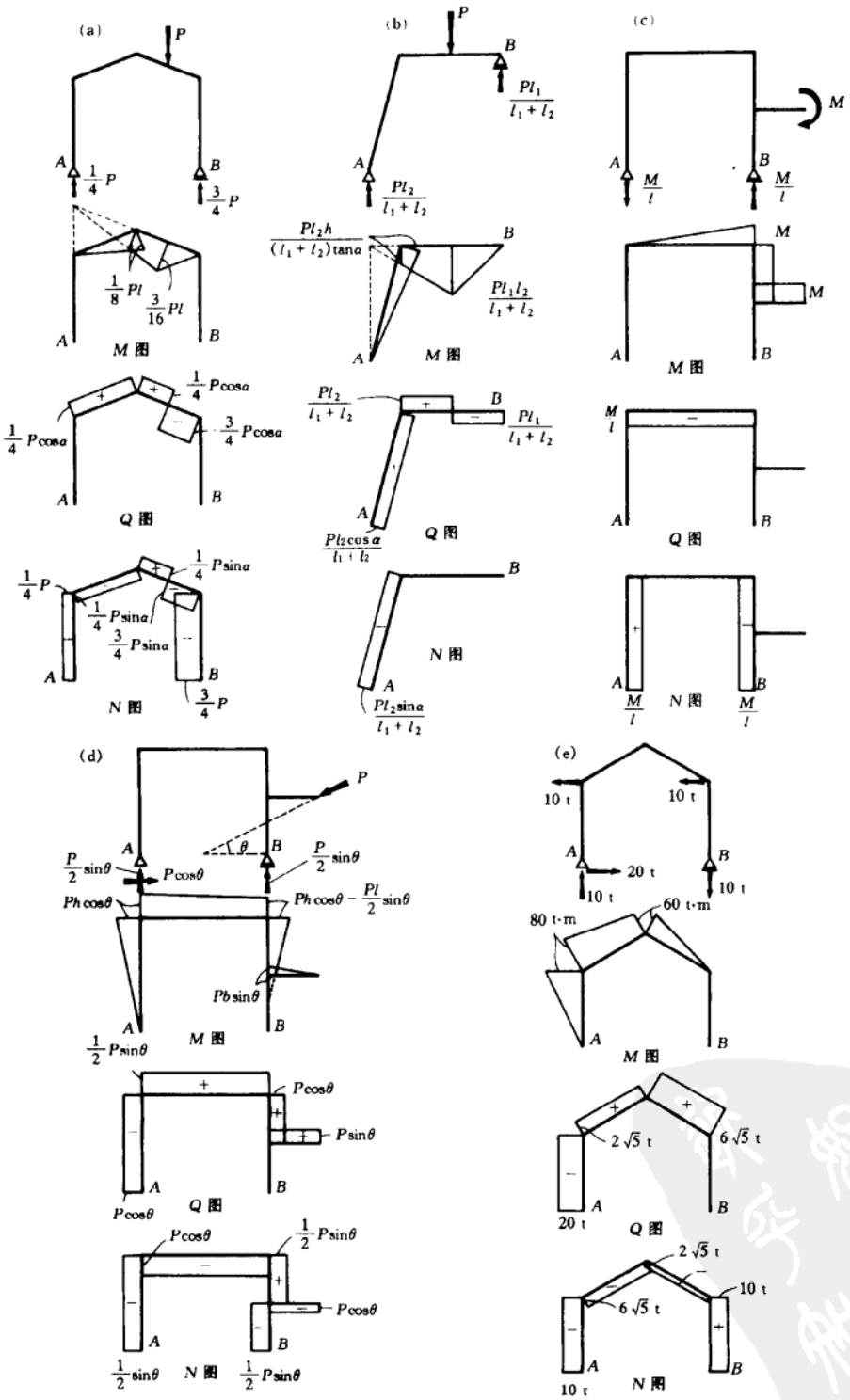
对任意 x 点的弯矩为

$$M(x) = -R_A x + \int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$$

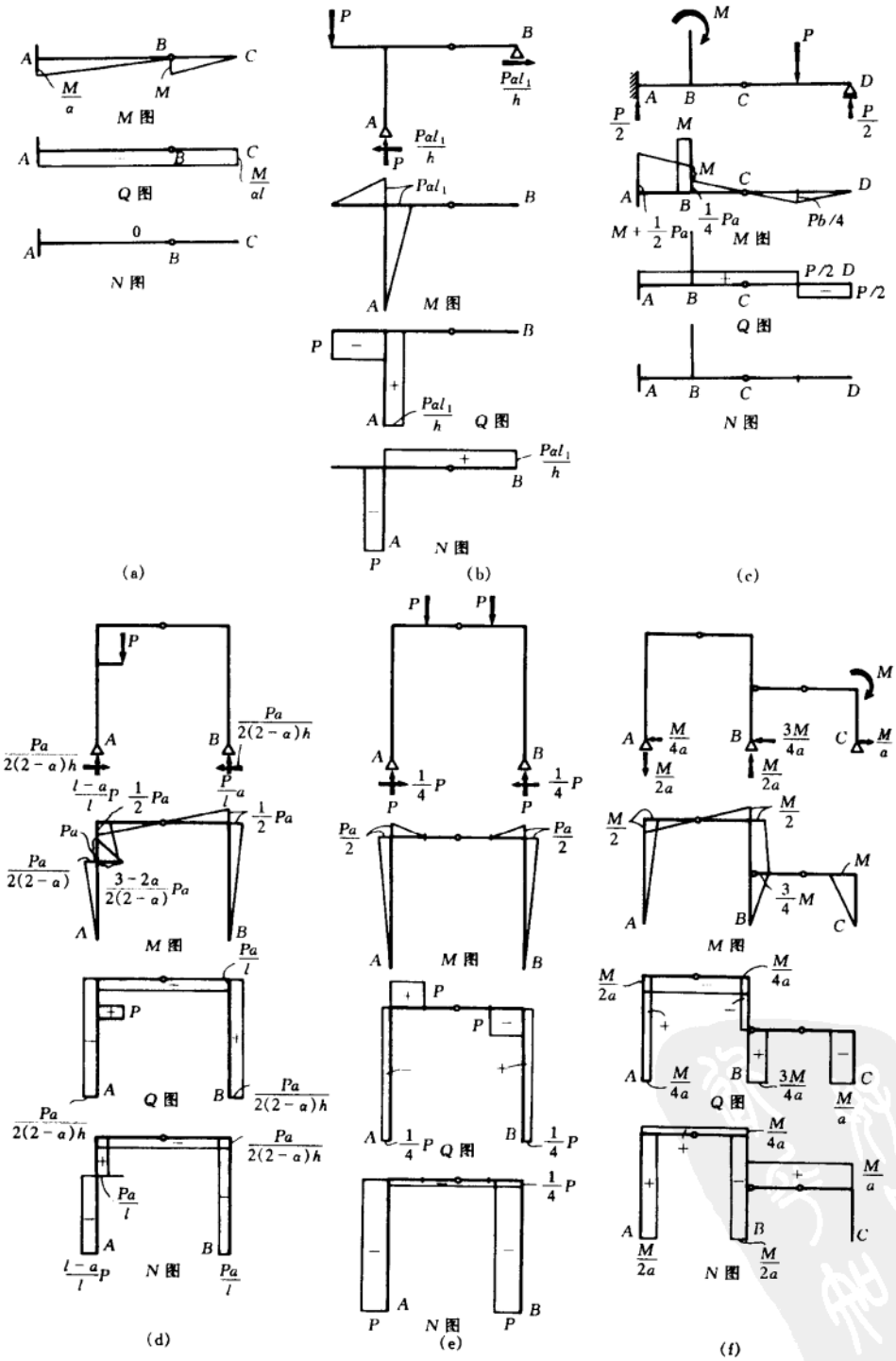
$$Q(x) = -\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = R_A - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

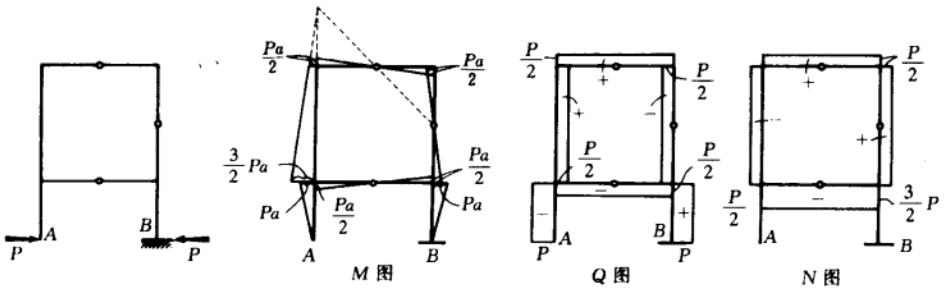
$$N(x) = 0$$

4.10

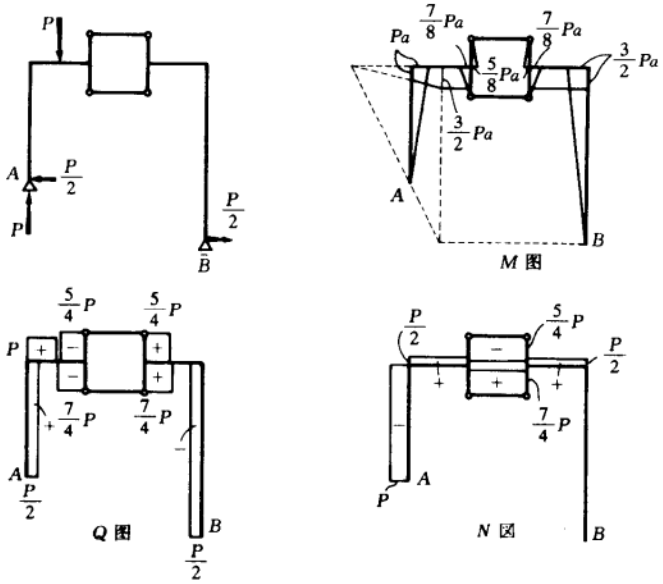


4.11



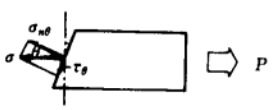


(g)



(h)

4.12



θ 方向的截面积为

$$A_\theta = \frac{tb}{\cos\theta}$$

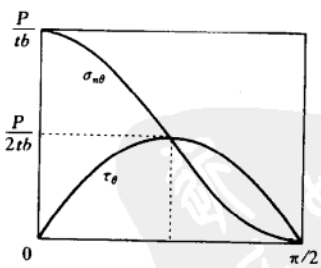
根据 $\sigma A_\theta = P$，可得

$$\sigma = \frac{P}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{tb}$$

所以

$$\sigma_{n\theta} = \sigma\cos\theta = \frac{P\cos^2\theta}{tb}$$

$$\tau_\theta = \sigma\sin\theta = \frac{P\cos\theta\sin\theta}{tb} = \frac{P\sin 2\theta}{2tb}$$



4.13 根据关系 $\sigma_f = M/Z$，故截面系数 Z 小的顺序对应着 σ_f 大的顺序

(a) $Z = \dfrac{B \times B^2}{6} \approx 0.167B^3$

(b) $Z=\dfrac{(B/2)\times(2B)^2}{6}\approx 0.333B^3$

(c) $Z=\dfrac{\pi B^3}{32}\approx 0.098B^3$

(d) $Z=\dfrac{1}{12}[B\times(2B)^3-B\times B^3]/B$

$\approx 0.583B^3$

(e) $Z=\dfrac{2B\times(B/2)^2}{6}\approx 0.583B^3$

(f) $Z=\dfrac{B^4/12}{B/\sqrt{2}}\approx 0.118B^3$

因此，σ_t 从大到小按(e)，(c)，(f)，(a)，(b)，(d)的顺序排列。

4.14 一般将通过形心轴的 I 设为 I_0，则可求得关于与形心轴相距 s 的平行轴的截面二次矩

$$I=As^2+I_0(A\text{ 为截面积})$$

首先求截面的一次矩。

$$S_x=(16\times 2)\times 8+(8\times 2)\times 1=272\ \text{cm}^3$$

$$S_y=(10\times 2)\times 5+(14\times 2)\times 1=128\ \text{cm}^3$$

截面积为

$$A=2\times 16+8\times 2=48\ \text{cm}^2$$

由此求得形心位置

$$x_G=\frac{S_y}{A}=2.67\ \text{cm}$$

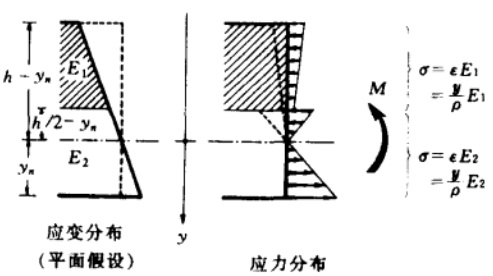
$$y_G=\frac{S_x}{A}=5.67\ \text{cm}$$

因此，关于 X，Y 轴的截面二次矩为

$$I_X=\frac{2\times 16^3}{12}+(2\times 16)\times(8-5.67)^2+\frac{8\times 2^3}{12}+(2\times 8)\times(5.67-1)^2=1\,210.7\ \text{cm}^4$$

$$I_Y=\frac{16\times 2^3}{12}+(16\times 2)\times(2.67-1)^2+\frac{2\times 8^3}{12}+(2\times 8)\times(6-2.67)^2=362.7\ \text{cm}^4$$

4.15 设 $E_1<E_2$(若 $E_1>E_2$ 可得同样结果)，平面假定成立。截面的应变分布和应力分布如图所示。



(1) 中性轴位置：考虑杆件轴力的平衡。

$$\int_A\sigma\,dA=\int_{-(h-y_n)}^{-(h/2-y_n)}\varepsilon E_1 b\,dy+\int_{-(h/2-y_n)}^{y_n}\varepsilon E_2 b\,dy=0$$

根据 $\varepsilon=y/\rho$，有

$$\frac{E_1}{\rho}\int_{(h-y_n)}^{-(h/2-y_n)}y\,d+\frac{E_2}{\rho}\int_{-(h/2-y_n)}^{y_n}y\,dy=0$$

所以 $$y_n=\frac{3E_1+E_2}{4(E_1+E_2)}h=\frac{3+n}{4(1+n)}h$$

式中，$n=E_2/E_1$。

(2) 考虑截面力矩的平衡。

$$-M-\int_{-(h-y_n)}^{-(h/2-y_n)}\varepsilon E_1 yb\,dy-\int_{-(h/2-y_n)}^{y_n}\varepsilon E_2 yb\,dy=0$$

所以

$$M=-\frac{E_1 b}{3\rho}\times\left[\frac{n+7}{8}h^3-\frac{3}{4}(n+3)h^2y_n+\frac{2}{3}(n+1)hy_n^2\right]=-\frac{E_1 bh^3}{96\rho}\frac{n^2+14n+1}{n+1}=-\frac{n_0E_1I}{\rho}$$

式中，$n_0=\dfrac{n^2+14n+1}{8(n+1)}$。

因此

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{M}{n_0E_1I}$$

在 A 点，由于 $M=-Pl$，故应力的分布为

E_1 的材料：$\sigma=\varepsilon E_1=\dfrac{E_1}{\rho}y=\dfrac{M}{n_0I}y$

E_2 的材料：$\sigma=\varepsilon E_2=\dfrac{nE_1}{\rho}y=\dfrac{nM}{n_0I}y$

(3) 根据

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{1}{\rho},\quad M=-P(l-x)=-\frac{n_0E_1I}{\rho}$$

有

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{P(l-x)}{n_0E_1I}$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{P}{n_0E_1I}\left(\frac{1}{2}x^2-lx+C_1\right)$$

$$v=-\frac{P}{n_0E_1I}\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{l}{2}x^2+C_1x+C_2\right)$$

边界条件为 $x=0$，$dv/dx=0$，$v=0$，则可得 $C_1=0$，$C_2=0$。由此得

$$v=\frac{P}{n_0E_1I}\left(\frac{l}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)$$

将 $x=l$ 代入上式，得 B 点的挠度为

$$v_B=\frac{-P}{n_0E_1I}\cdot\frac{l^3}{3}$$

4.16

(1) 最大弯矩产生在荷载点处，为 $100P(\text{kg}\cdot\text{cm})$。

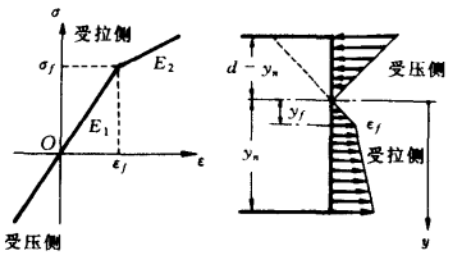
$$\sigma_f = \frac{M}{Z} = \frac{100P}{5\times 12^2/6} = 2.0\times 10^3$$

所以 $$P = 2400\ \text{kg}$$

(2) 使用图示的记号，$\sigma-\varepsilon$ 曲线可表示如下。

$$\sigma = \begin{cases} E_1\varepsilon & (\varepsilon \leqslant \varepsilon_f) \\ (E_1-E_2)\varepsilon_f + E_2\varepsilon & (\varepsilon \geqslant \varepsilon_f) \end{cases} \tag{a}$$

当 $P=3\text{t}$ 时，受拉侧的材料超过了 ε_f。此时，若仍设



平面假定成立，则根据图的几何关系有

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_f}{y_f}y \tag{b}$$

根据式(b)，式(a)为

$$\sigma = \begin{cases} E_1\dfrac{\varepsilon_f}{y_f}y & -(d-y_n) \leqslant y \leqslant y_f \\ (E_1-E_2)\varepsilon_f + E_2\dfrac{\varepsilon_f}{y_f}y & y_f \leqslant y \leqslant y_n \end{cases} \tag{c}$$

考虑杆件轴向力的平衡，有

$$0 = \int_A \sigma(y)\mathrm{d}A$$

$$= \frac{bE_1\varepsilon_f}{y_f}\int_{-(d-y_n)}^{y_f} y\mathrm{d}y + \int_{y_f}^{y_n}\left[(E_1-E_2)\varepsilon_f + E_2\frac{\varepsilon_f}{y_f}y\right]b\mathrm{d}y$$

积分后可得

$$y_f^2 - 2y_n y_f + y_n^2 - 2ed y_n + ed^2 = 0 \tag{d}$$

式中，$e = E_1/(E_1-E_2)$。

所以 $$y_f = y_n - 4\sqrt{ed(2y_n-d)} \tag{e}$$

根据中性轴的力矩平衡，有

$$M = \int_A y\sigma(y)\mathrm{d}A$$

$$= \int_{-(d-y_n)}^{y_n}\frac{bE_1\varepsilon_f}{y_f}y^2\mathrm{d}y + \int_{y_f}^{y_n}\varepsilon_f\left[(E_1-E_2)+\frac{E_2}{y_f}y\right]yb\mathrm{d}y$$

积分并将给出的 $E_1, E_2, \varepsilon_f, b$ 值代入，可得

$$M = \frac{10}{3y_f}[y_f^3 + (d-y_n)^3] + \frac{5}{2}(y_n^2 - y_f^3)\ (\text{t}\cdot\text{cm}) \tag{f}$$

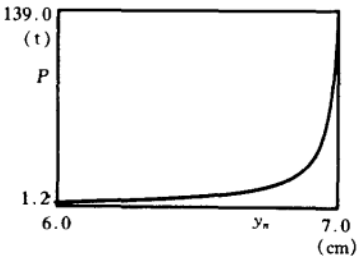
按 $M = 100P(\text{t}\cdot\text{cm})$ 对式(f)进行整理，可得

$$P = \frac{1}{120y_f}[-2y_n + 3(48+y_f)y_n^2 - 1\,728y_n - 5y_f^3 + 6\,912]$$

在式(e)式中代入数值可得 y_f 的值为

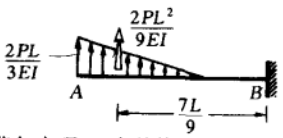
$$y_f = y_n - 4\sqrt{3(y_n-6)}$$

(3) P 与 y_n 的关系如图所示。



4.17 自由端与可动铰支座接触时，有

$$M_A = \frac{2PL}{3} = 66.7P(\text{kg}\cdot\text{cm})$$



此时根据莫尔定理，B 点的挠度为

$$v_B = \frac{2PL^2}{9EI}\cdot\frac{7L}{9} = \frac{14PL^3}{81EI}$$

由于与可动铰支座的空隙为 $v_0 = 0.2\ \text{cm}$，接触时的力为

$$P = \frac{81EIv_0}{14L^3} = \frac{81\times 1.0\times 10^6\times 0.2}{14\times(1\times 10^2)^3} = 1.16\ (\text{kg})$$

此时，$M_A = 77.3\ (\text{kg}\cdot\text{cm})$。

考虑接触后可动铰支座的反力 R_B。



同样可根据莫尔定理求由 R_B 产生 B 点的挠度

$$v'_B = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

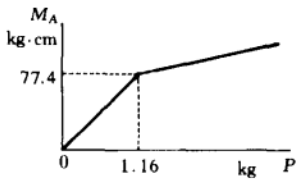
由于在 B 点接触后保持关系：$v_B - v'_B = v_0$，故

$$\frac{14PL^3}{81EI} - \frac{R_B L^3}{3EI} = v_0$$

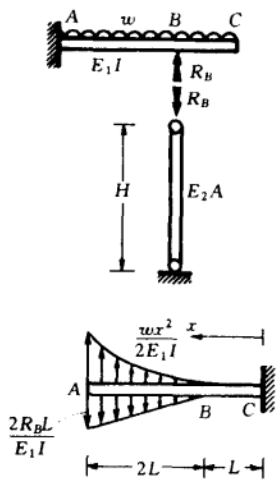
所以 $$R_B = \frac{14}{27}P - \frac{3EIv_0}{L^3}$$

因此

$$M_A = \frac{2PL}{3} - R_B L = \frac{4PL}{27} + \frac{3EIv_0}{L^2}$$
$$= 14.8P + 60\ (\text{kg}\cdot\text{cm})$$



4.18 由于是超静定结构，故考虑 B 点的变形进行求解。如图所示，设 B 点的反力为 R_B，由 R_B 与 w 引起的梁在 B 点的挠度 u_{B1} 与由 R_B 引起的钢管的轴向变形 u_{B2} 相等，故可求得 R_B 与 u_{B1}。使用图示的记号，u_{B1} 可由莫尔定理求出



莫尔定理的应用

$$u_{B1} = M_B = \int_L^{3L}(x-L)\frac{wx^2}{2E_1I}dx - \frac{2R_BL^2}{E_1I}\cdot\frac{4L}{3}$$
$$= \frac{L^3}{3E_1I}(17wL - 8R_B) \qquad (a)$$

同时，C 点的挠度 u_C 可由莫尔定理求出

$$u_C = M_C = \int_0^{3L} x\frac{wx^2}{2E_1I}dx - \frac{2R_BL^2}{E_1I}\cdot\frac{7L}{3}$$
$$= \frac{L^3}{E_1I}\left(\frac{81wL}{8} - \frac{14R_B}{3}\right)$$

根据钢管的轴向变形与应力、应变的关系，有

$$\frac{R_B}{A} = E_2\frac{u_{B2}}{H} \qquad (b)$$

将式(a)，(b)代入关系 $u_{B1} = u_{B2}$，可得

$$R_B = \frac{17wL^4}{3E_1I}\Big/\left(\frac{H}{AE_2} + \frac{8L^3}{3E_1I}\right)$$

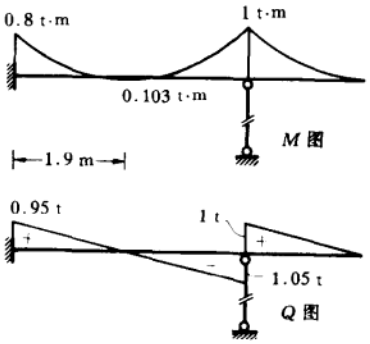
将给出的数值代入可得

$R_B = 2.05$ (t)

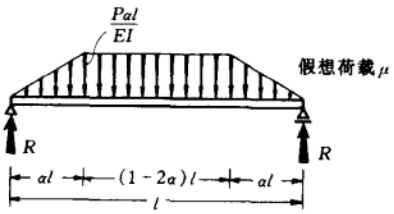
$u_B = u_{B1} = u_{B2} = R_BH/AE_2 = 2.56\times10^{-4}$(m)

$u_C = 7.15\times10^{-4}$(m)

由于未知反力 R_B 已求得，下面可作为静定悬臂梁来求解，并可求得 M，Q 图。



4.19 (1) 根据莫尔定理求得荷载点的位移 δ。



假想荷载的反力为

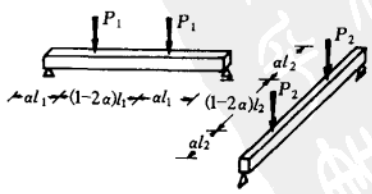
$$R = \frac{1}{2}\left[\frac{Pal}{EI}\cdot al + \frac{Pal}{EI}(1-2a)l\right] = \frac{Pa(1-a)l^2}{2EI}$$

由此，荷载点的力矩、即挠度为

$$u = Ral - \frac{Pal}{EI}\cdot\frac{1}{2}al\cdot\frac{1}{3}al = \frac{a^2(3-4a)}{6EI}Pl^3$$

(2) 设 ①，② 杆所承担的荷载分别为 P_1，P_2，有

$$P_1 + P_2 = P \qquad (a)$$



设 ①，② 杆在荷载点的挠度为 u_1，u_2，利用(1)的结

果，有

$$u_1 = \frac{1}{6EI_1}\alpha^2(3-4\alpha)P_1l_1^3$$
$$u_2 = \frac{1}{6EI_2}\alpha^2(3-4\alpha)P_2l_2^3 \quad (b)$$

由于在荷载点处两杆的挠度相等

$$u_1 = u_2 \quad (c)$$

联立求解(a)，(b)，(c)三式，可得

$$P_1 = \frac{I_1l_2^3}{I_1l_2^3 + I_2l_1^3}P \quad (A\text{点的反力})$$

$$P_2 = \frac{I_2l_1^3}{I_1l_2^3 + I_2l_1^3}P \quad (B\text{点的反力})$$



第5章练习题答案

5.1 设刚度为 $K = I/L$，则梁的荷载项为

$$C_{BC} = -\frac{wL^2}{12},\ C_{CB} = \frac{wL^2}{12}$$

1.

(1) 未知变形为 θ_B，θ_C。

(2) 基本公式：

$$M_{AB} = 2EK(\theta_B),\ M_{BA} = 2EK(2\theta_B)$$
$$M_{BC} = 2EK(2\theta_B + \theta_C) - \frac{wL^2}{12}$$
$$M_{CB} = 2EK(\theta_B + 2\theta_C) + \frac{wL^2}{12}$$

(3) 节点方程式：

$$\begin{cases} M_{CB} = 0 \\ M_{BA} + M_{BC} = 0 \end{cases}$$

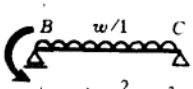
(4) 将(2)代入(3)求解，有

$$\theta_B = \frac{3}{84}\cdot\frac{wL^2}{2EK}$$
$$\theta_C = -\frac{5}{84}\cdot\frac{wL^2}{2EK},\ |\theta_C| = \frac{5}{3}|\theta_B|$$

(5) 将它们代入(2)，有

$$M_{AB} = \frac{1}{28}wL^2$$
$$M_{BA} = -M_{BC} = \frac{2}{28}wL^2$$

(6) 为求出梁的内力，例如 BC 杆件，可对右边的简支梁求解即可



$$|M_{BC}| = \frac{2}{28}wL^2$$

2.

(1) 未知变形为 θ_B，θ_C 再加上柱杆件转角 R_{AB}。

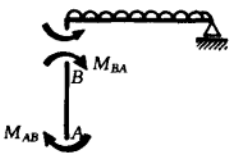
(2) 基本公式：

$$M_{AB} = 2EK(\theta_B - 3R_{AB})$$
$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B - 3R_{AB})$$
$$M_{BC} = 2EK(2\theta_B + \theta_C) - \frac{wL^2}{12}$$
$$M_{CB} = 2EK(\theta_B + 2\theta_C) + \frac{wL^2}{12}$$

(3) 节点方程式：同1

(4) 层方程式：如图所示切开后，由于梁上无水平力的作用，故柱中不产生剪力。因此有

$$(M_{AB} + M_{BA})/L = 0$$



(5) 将(2)代入(3)、(4)求解，有

$$\theta_B = \frac{6}{96}\cdot\frac{wL^2}{2EK},\ \theta_C = -\frac{7}{96}\cdot\frac{wL^2}{2EK},\ R_{AB} = \frac{3}{96}\cdot\frac{wL^2}{2EK}$$

故有

$$|\theta_B| = 2|R_{AB}|,\ |\theta_C| = \frac{7}{3}|R_{AC}|$$

(6) 杆端力矩：将(5)代入(2)，有

$$M_{AB} = -\frac{1}{32}wL^2,\ M_{BA} = -M_{BC} = \frac{1}{32}wL^2$$

(7) 梁的内力，可用与1相同的方法求得。

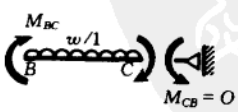
3.

(1) 未知变形为 θ_B，θ_C 加上梁的杆件转角 R_{BC}。

(2) 基本公式：

$$M_{AB} = 2EK(\theta_B)$$
$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B)$$
$$M_{BC} = 2EK(2\theta_B + \theta_C - 3R_{BC}) - \frac{wL^2}{12}$$
$$M_{CB} = 2EK(\theta_B + 2\theta_C - 3R_{BC}) + \frac{wL^2}{12}$$

(3) 节点方程式：与1相同



(4) 剪力方程式：将梁切开后，由于无垂直方向力的作用，故梁中不产生剪力。因此由 B 点的力矩平衡有

$$M_{BC}+\frac{wL^2}{2}=0$$

(5) 将(2)代入(3)、(4)求解,有

$$\theta_B=\frac{3}{12}\cdot\frac{wL^2}{2EK}$$

$$\theta_C=\frac{7}{12}\cdot\frac{wL^2}{2EK}$$

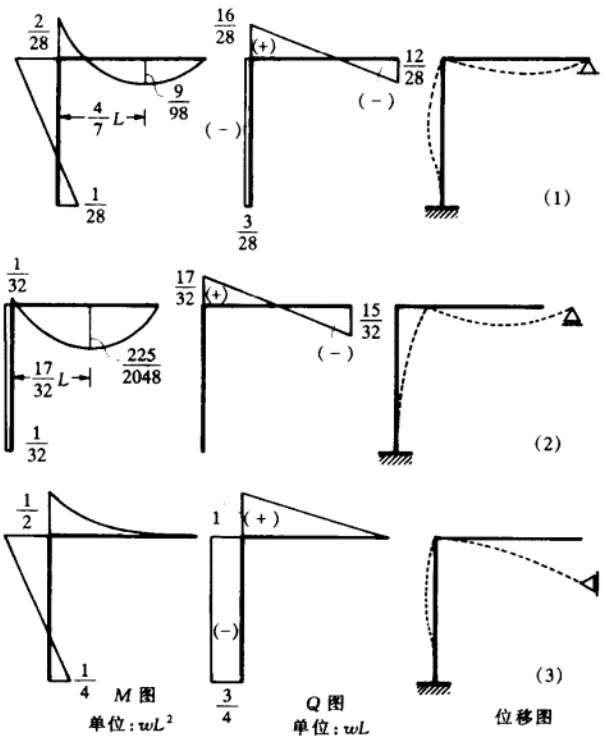
$$R_{BC}=\frac{6}{12}\cdot\frac{wL^2}{2EK}$$

故有

$$|\theta_B|=\frac{1}{2}|R_{BC}|,|\theta_C|=\frac{7}{6}|R_{BC}|$$

(6) 杆端力矩:$M_{AB}=\frac{1}{4}wL^2$,$M_{BA}=-M_{BC}=\frac{1}{2}wL^2$

(7) 梁的内力,可用与1相同的方法求得。



图解 5.1

5.2

(1) 刚度:设 $K_{AB}=\frac{2I}{L}=K$,则有

$$K_{BC}=\alpha\frac{2I}{L}=\alpha K$$

荷载项:

$$C_{AB}=-\frac{PL}{16},C_{BA}=\frac{PL}{16}$$

(2) 未知变形为 θ_A,θ_B 及 $R_{AB}=-R_{BC}=R$。

(3) 基本公式:

$$M_{AB}=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R)-\frac{PL}{16}$$

$$M_{BA}=2EK(\theta_A+2\theta_B-3R)+\frac{PL}{16}$$

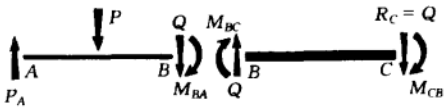
$$M_{BC}=2E\alpha K(2\theta_B+3R)$$

$$M_{CB}=2E\alpha K(\theta_B+3R)$$

(4) 节点方程式:

$$M_{AB}=0,M_{BA}+M_{BC}=0$$

(5) 剪力方程式:由于在图中 B 点处的剪力保持平衡,故有



$$Q = -\frac{M_{BA} + PL/4}{L/2} = -\frac{M_{BC} + M_{CB}}{L/2}$$

(6) 将(3)代入(4)、(5)整理后，有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2(1+\alpha) & -3(1-\alpha) \\ 1 & 2-3\alpha & -3(1+2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \frac{1}{16} \cdot \frac{PL}{2EK}$$

(7) 求解(6)，可得

$$\theta_A = \frac{3(\alpha^2 + 31\alpha + 4)}{6\alpha(7+\alpha)} \cdot \frac{PL}{32EK}$$

$$\theta_B = \frac{3(4 - 17\alpha)}{6\alpha(7+\alpha)} \cdot \frac{PL}{32EK}$$

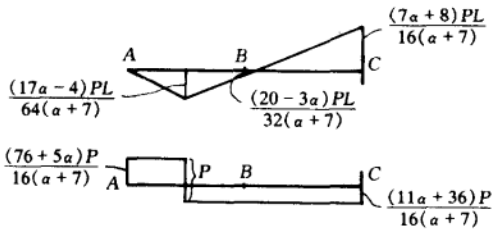
$$R = \frac{12 + 31\alpha}{6\alpha(7+\alpha)} \cdot \frac{PL}{32EK}$$

B 点的挠度为

$$u_B = RL/2$$

将他们代入(3)，可得杆端力矩。

用图表示出 $\alpha < 20/3$ 时的 M、Q 图。



5.3

(1) 设柱的刚度为标准刚度，$K_2 = \alpha K_1$。由于是反对称变形，故未知变形为 $\theta_B = \theta_C$、R。

(2) 基本公式：

$$M_{AB} = M_{DC} = 2EK_1(\theta_B - 3R)$$

$$M_{BA} = M_{CD} = 2EK_1(2\theta_B - 3R)$$

$$M_{BC} = M_{CB} = 2E\alpha K_1(3\theta_B)$$

(3) 节点方程式：

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

(4) 层方程式为：

$$-\left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{H} + \frac{M_{DC} + M_{CD}}{H}\right) = P$$

(5) 将(2)代入(3)、(4)，就 R 求解，可得

$$R = \frac{2 + 3\alpha}{12(1+6\alpha)} \cdot \frac{PH}{EK_1}$$

因此，水平位移为

$$u = RH = \frac{2 + 3\alpha}{12(1+6\alpha)} \cdot \frac{PH^2}{EK_1} \qquad (a)$$

当 $\alpha \to \infty$ 时，

$$u_\infty = (1/24)(PH^2/EK_1) = 0.042(PH^2/EK_1)$$

若 $\alpha > 25$ 时，可认为 $u \approx u_\infty$，由图可见当 $\alpha > 5$ 时，在工程上也可近似认为 $K_2 \approx \infty$。当 $K_2 \to \infty$、即 $\alpha \to \infty$ 时，可根据产生 $u = 1$ 所需的力求得刚架的水平刚度 k。

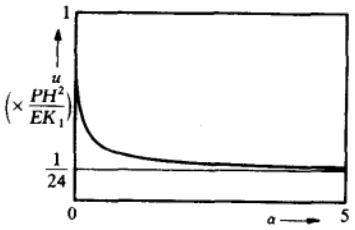
$$k = \frac{24EK_1}{H^2}$$

因此，水平振动的固有周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{g} \cdot \frac{H^2}{24EK_1}} \quad (g \text{ 为重力加速度})$$

$$= 2 \times 3.14\sqrt{\frac{10 \times 10^3}{980} \times \frac{400^2}{24 \times 2 \times 10^5 \times 533}}$$

$$\approx 0.16 \text{ s}$$



5.4

(1) 刚度：

$$K_1 = (0.4)^4/(12 \times 3.6) = 5.93 \times 10^{-4}(\text{m}^3)$$

$$K_2 = 0.3 \times (0.5)^3/(12 \times 4.2) = 7.44 \times 10^{-4}(\text{m}^3)$$

$$K_3 = (0.3)^4/(12 \times 1.8) = 3.75 \times 10^{-4}(\text{m}^3)$$

荷载项：

$$C_{23} = -1.2 \times 3^2 \times 12/4.2^2 = -7.35(\text{t} \cdot \text{m})$$

$$C_{32} = 1.2^2 \times 3 \times 12/4.2^2 = 2.94(\text{t} \cdot \text{m})$$

(2) 未知变形：θ_2、θ_3、R_1、$R_2 = (h_1/h_2)R_1 = 2R_1$

(3) 基本公式：

$$M_{12} = 2EK_1(\theta_2 - 3R_1)$$

$$M_{21} = 2EK_1(2\theta_2 - 3R_1)$$

$$M_{23} = 2EK_2(2\theta_2 + \theta_3) + C_{23}$$

$$M_{32} = 2EK_2(\theta_2 + 2\theta_3) + C_{32}$$

$$M_{34} = 2EK_3(2\theta_3 - 6R_1)$$

$$M_{43} = 2EK_3(\theta_3 - 6R_1)$$

(4) 节点方程式：

$$M_{21}+M_{23}=0, M_{32}+M_{34}=0$$

(5) 层方程式为：

$$-\left(\frac{M_{12}+M_{21}}{h_1}-\frac{M_{34}+M_{43}}{h_2}\right)=0$$

(6) 将(3)代入(4)、(5)整理后，可得

$$2E\begin{bmatrix}2(K_1+K_2) & K_2 & -3K_1\\ K_2 & 2(K_2+K_3) & -6K_3\\ -3K_1 & -6K_3 & 6(K_1+4K_3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\\ R_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-C_{21}\\ C_{32}\\ 0\end{bmatrix}$$

代入各数值可得

$$\begin{bmatrix}26.74 & 7.44 & -17.79\\ 7.44 & 22.38 & -22.50\\ -17.79 & -22.50 & 125.58\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\\ R_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.35\\ -2.94\\ 0\end{bmatrix}\frac{1}{2E\times10^{-4}}$$

对之求解，可得

$$\begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\\ R_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.346\\ -0.240\\ 0.006\end{bmatrix}\frac{1}{2E\times10^{4}}$$

(7) 代入(2)，得到杆端力矩。

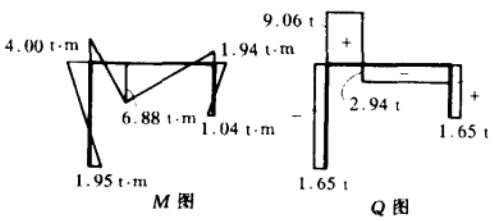
$$M_{12}=1.95,\ M_{21}=-M_{23}=4.00$$

$$M_{32}=-M_{34}=1.94, M_{43}=-1.04(\mathrm{t\cdot m})$$

根据 $E=2.1\times10^{7}\mathrm{kg/cm^2}=2.1\times10^{6}\mathrm{t/m^2}$，可得水平位移为

$$u=R_1h_1=\frac{0.006\times3.6}{2\times2.1\times10^{6}\times10^{-4}}$$

$$=5.1\times10^{-3}(\mathrm{m})=0.051(\mathrm{mm})$$



5.5 设刚度为 $K=I/L$。

(1) 未知变形：由于在 C 点产生两个独立的转角，故为 4 个：$\theta_B,\theta_{CB},\theta_{CD},R$。

(2) 基本公式：

$$M_{AB}=2EK(\theta_B-3R)$$

$$M_{BA}=2EK(2\theta_B-3R)$$

$$M_{BC}=2EK(2\theta_B+\theta_{CB})$$

$$M_{CB}=2EK(\theta_B+2\theta_{CB})$$

$$M_{CD}=2EK(2\theta_{CD}-3R)$$

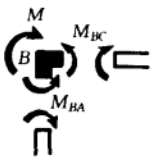
$$M_{DC}=2EK(\theta_{CD}-3R)$$

(3) 节点方程式：根据 B 点处的力矩平衡或由图，有

$$M=M_{BA}+M_{BC}$$

由于 C 点处为铰接，故有

$$M_{CB}=0, M_{CD}=0$$



(4) 层方程式：由于水平方向无外力作用，故

$$\frac{M_{AB}+M_{BA}}{L}+\frac{M_{DC}}{L}=0$$

(5) 将(2)代入(3)、(4)求解后可得

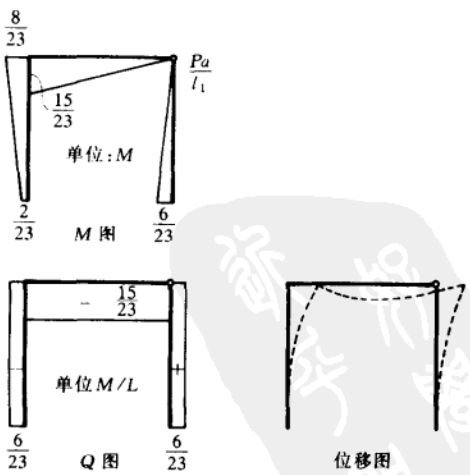
$$\theta_B=\frac{10}{23}\cdot\frac{M}{2EK}, \theta_{CB}=-\frac{5}{23}\cdot\frac{M}{2EK}$$

$$\theta_{CD}=\frac{6}{23}\cdot\frac{M}{2EK}, R=\frac{4}{23}\cdot\frac{M}{2EK}$$

变形量之比为：

$$|\theta_B|=\frac{5}{2}|R|, |\theta_{CB}|=\frac{5}{4}|R|, |\theta_{CD}|=\frac{3}{2}|R|$$

将它们代入(2)式，可求得杆端力矩。



5.6 设标准刚度为 $K=I/20\mathrm{m}$，有

$$K_{AB} = K_{HG} = 5K$$
$$K_{BE} = K_{CD} = K_{DF} = K_{BG} = 4K$$
$$K_{CB} = K_{DE} = K_{FG} = 10K$$

(1) 未知变形：根据对称性，有 $\theta_D = \theta_E = 0$。同时，由于梁没有轴向变形，故柱不产生杆件转角。因此

$\theta_A(=-\theta_H)$，$\theta_B(=\theta_{BA}=\theta_{BC}=-\theta_{GF}=-\theta_{GH})$

$\theta_{BE}(=-\theta_{GE})$，$\theta_C(=-\theta_F)$

$R(=R_{CD}=R_{BE}=-R_{DF}=-R_{EG})$

这里由于有

$$M_{AB} = 2E(5K)(2\theta_A + \theta_B) = 0$$
$$M_{BE} = 2E(4K)(2\theta_{BE} - 3R) = 0$$

故有

$$\theta_A = -\theta_B/2, \theta_{BE} = 3R/2$$

结果，独立的未知变形仅为：θ_B，θ_C，R。

(2) 基本公式：

$$M_{BA} = 2E(5K)(2\theta_B - \theta_B/2) = EK(15\theta_B)$$
$$M_{EB} = 2E(4K)(\frac{3}{2}R - 3R) = EK(-12R)$$
$$M_{BC} = 2E(10K)(2\theta_B + \theta_C)$$
$$M_{CB} = 2E(10K)(\theta_B + 2\theta_C)$$
$$M_{CD} = 2E(4K)(2\theta_C - 3R)$$
$$M_{DC} = 2E(4K)(\theta_C - 3R)$$

(3) 节点方程式：

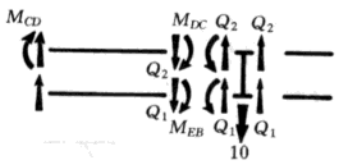
在 B 点：
$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (a)$$

在 C 点：
$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (b)$$

(4) 剪力方程式：如图所示切开后，考虑平衡有

$$\begin{cases} 2Q_1 + 2Q_2 = 10 \\ Q_1 = -M_{EB}/5 \\ Q_2 = -(M_{CD} + M_{DC})/5 \end{cases}$$

所以
$$M_{EB} + M_{CD} + M_{DC} = -25 \quad (c)$$



(5) 将(2)代入式(a)，(b)，(c)整理后可得

$$\begin{bmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 5 & 14 & -6 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{251}{12EK}$$

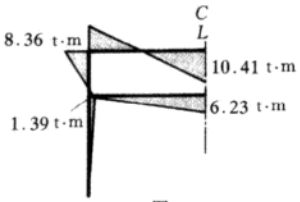
对之求解，将解代入(2)，可得杆端力矩。即

$\theta_B = -12$，$\theta_C = -33$，$R = 67$(单位：$25/3228EK$)

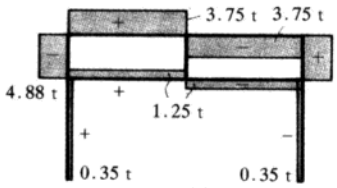
$M_{BA} = -M_{BC} = -1.39$，$M_{CB} = -M_{CD} = 8.36$

$M_{DC} = -10.41$，$M_{EB} = -6.23$(单位：t·m)

由于是对称柱故 DE 杆中不产生弯矩。

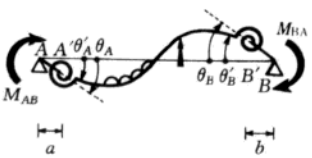


M 图



Q 图

5.7



(1) 由于 a，b 小到可以忽略，故在 $A'-B'$ 之间可使用转角法的基本公式，

$$\begin{cases} M_{AB} = 2EK(2\theta'_A + \theta'_B) + C_{AB} \\ M_{BA} = 2EK(\theta'_A + 2\theta'_B) + C_{BA} \end{cases} \quad (a)$$

而弹簧的变形与杆端力矩的关系为

$$\begin{cases} M_{AB} = k_A(\theta_A - \theta'_A) \\ M_{BA} = k_B(\theta_B - \theta'_B) \end{cases} \quad (b)$$



由式(a)、(b)消去 θ'_A，θ'_B，可得杆端旋转弹簧的基本公式。由于 $2EK$ 与 k_A，k_B 均具有力矩的量纲，将之表示为：$k_A = \alpha_A(2EK)$，$k_B = \alpha_B(2EK)$，由式(b)解出 θ'_A，θ'_B 代入式(a)，可得

$$M_{AB}(\alpha_A + 2)/\alpha_A + M_{BA}/\alpha_B = 2EK(2\theta_A + \theta_B) + C_{AB}$$
$$M_{AB}/\alpha_A + M_{BA}(\alpha_B + 2)/\alpha_B = 2EK(\theta_A + 2\theta_B) + C_{BA}$$

对 M_{AB}，M_{BA} 求解可得

$$\begin{cases} M_{AB} = \alpha_A\{2EK[(2\alpha_B+3)\theta_A+\alpha_B\theta_B] \\ \qquad +(\alpha_B+2)C_{AB}-C_{BA}\}/\Delta \\ M_{BA} = \alpha_B\{2EK[\alpha_A\theta_A+(2\alpha_A+3)\theta_B]-C_{AB} \\ \qquad +(\alpha_A+2)C_{BA}\}/\Delta \end{cases} \tag{c}$$

式中，$\Delta = 3+2\alpha_A+2\alpha_B+\alpha_A\alpha_B$。

(2) 未知变形为：$\theta_B = \theta_C$，R。对杆件 BC 由于有 $k_A = k_B = k$，故可将 $\alpha_A = \alpha_B = \alpha$ 代入式(c)

$$M_{AB} = M_{BC} = 2EK(\theta_B - 3R)$$

$$M_{BA} = M_{CB} = 2EK(2\theta_B - 3R)$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{2EK\alpha}{3+4\alpha+\alpha^2}[(2\alpha+3)\theta_B+\alpha\theta_B]$$

$$= \frac{2EK\alpha}{3+4\alpha+\alpha^2}3(\alpha+1)\theta_B$$

将它们代入节点方程式

$$M_{BA}+M_{BC} = 0$$

及方程式

$$-2(M_{BA}+M_{AB})/L = P$$

可求得

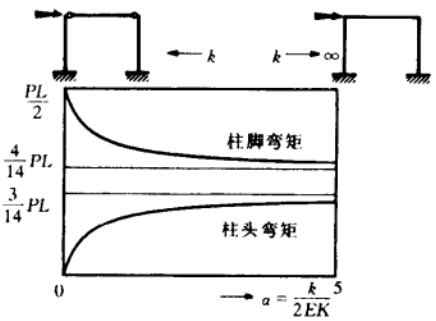
$$\theta_B = \frac{\alpha+3}{2(7\alpha+3)}\cdot\frac{PL}{2EK}$$

$$R = \frac{5\alpha+6}{6(7\alpha+3)}\cdot\frac{PL}{2EK}$$

柱脚、柱头的力矩为

$$M_{AB} = -\frac{4\alpha+3}{2(7\alpha+3)}PL$$

$$M_{BA} = -\frac{3\alpha}{2(7\alpha+3)}PL$$



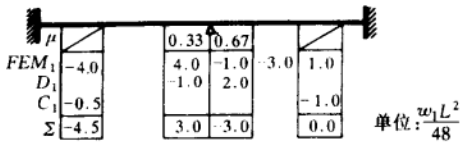
当 $k\to 0$ 时，弹簧已不能传递转动，柱接近于悬臂梁，当 $k\to\infty$ 时，弹簧不变形而接近于刚接点。

5.8

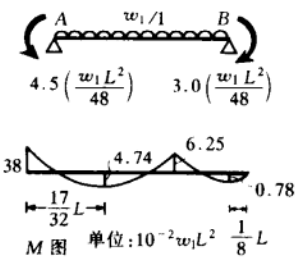
(1) $K_{AB} = I/L$，$K_{BC} = 2I/L = 2K_{AB}$。

设 $C_{BC} = -w_1L^2/48 = -M_1$，则荷载项为

$$C_{CB} = M_1, C_{AB} = -4M_1, C_{BA} = 4M_1$$



可由简支梁求得杆件 AB 等的内力，如图所示



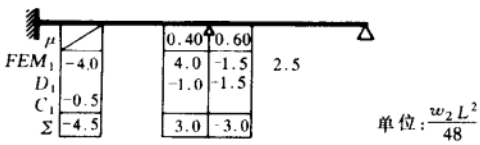
(2) 对杆件 BC，利用有效刚度比 $0.75K_{BC} = 1.5K_{AB}$。设 $M_2 = w_2L^2/48$，则荷载项为

$$C_{AB} = -4M_2, C_{BA} = 4M_2$$

同时有

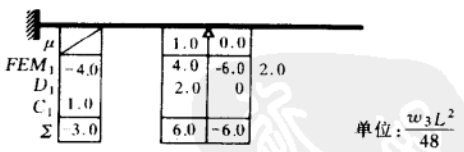
$$H_{BC} = C_{BC} - C_{CB}/2 = -1.5M_2$$

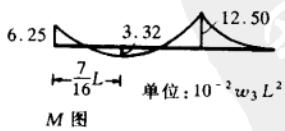
从结果可见，它与(1)的内力状态相同(M 图也与(1)相同)。



(3) 设 $M_3 = w_3L^2/48$，则荷载项为

$$C_{AB} = -4M_3, C_{BA} = 4M_3, C_{BC} = -6M_3$$



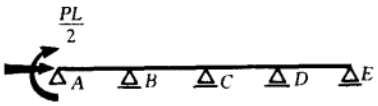


由于 A 点处的弯矩的大小之比为

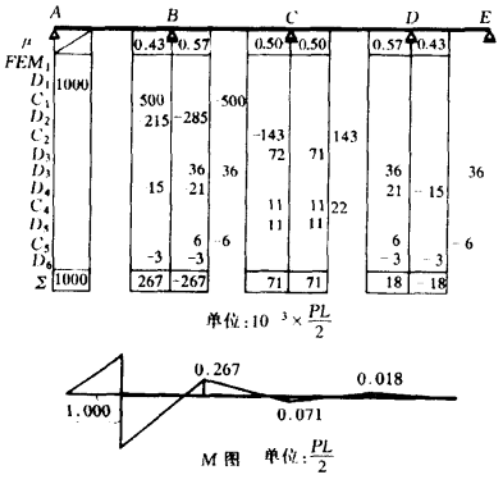
$$4.5w_1 : 4.5w_2 : 3.0w_3$$

为使它们相等只需令 $w_1 = w_2, w_3 = 1.5w_1$ 即可。

5.9



该问题等价于图示梁的求解问题。对所有的杆件设刚度相同。对 AB、DE 杆件使用铰接杆件的有效刚度比。设 $PL/2 = 1\,000$。



各杆件的平衡状态如图所示。

$Q_1 L + (1.000 + 0.267)PL/2 = 0$

所以 $Q_1 = -0.634P$

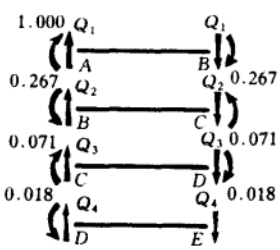
$Q_2 L - (0.267 + 0.071)PL/2 = 0$

所以 $Q_2 = -0.169P$

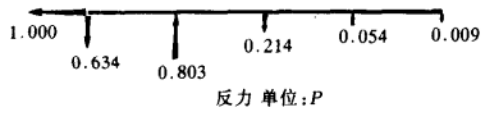
$Q_3 L + (0.071 + 0.018)PL/2 = 0$

所以 $Q_3 = -0.045P$

$Q_4 L - 0.018PL/2 = 0$ 所以 $Q_3 = 0.009P$



因此，反力如下图所示。



5.10

刚度：

$K_{AB} = I/L, K_{BC} = 2I/L = 2K_{AB}, K_{BD} = K_{AB}$

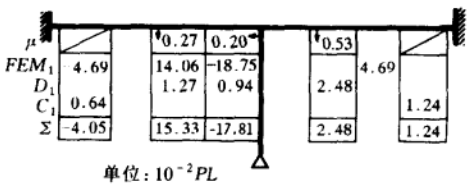
对 BD 杆件使用铰接杆件的有效刚度 $0.75K_{BD}$。

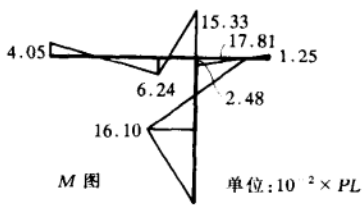
则荷载项为

$$C_{AB} = -\frac{(3L/4)(L/4)^2 P}{L^2} = -4.69 \times 10^{-2} PL$$

$$C_{BA} = \frac{(3L/4)^2 (L/4)P}{L^2} = 14.06 \times 10^{-2} PL$$

$$H_{BD} = C_{BC} - C_{CB}/2 = -\frac{3PL}{16} = -18.75 \times 10^{-2} PL$$





5.11 刚度与荷载项已在 5.4 中计算出。分担系数由式(5.24)可得

$$d_1^* = -\frac{5.93E/3.6}{2 \times \left(\frac{5.93E}{3.6^2} + \frac{3.75E}{1.8^2}\right)} = -0.510(\text{m})$$

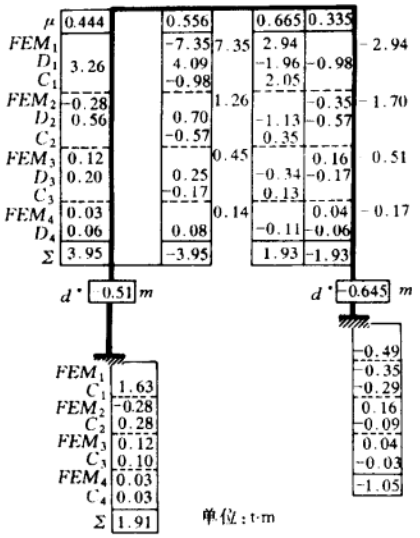
$$d_2^* = -\frac{3.75E/1.8}{2 \times \left(\frac{5.93E}{3.6^2} + \frac{3.75E}{1.8^2}\right)} = -0.645(\text{m})$$

第一次的 FEM 是将梁约束。第二次以后的 FEM 是为了抵消由于约束解除在柱中产生的不平衡剪力，该剪力根据下式计算

$$\Delta Q = (D_{柱1} + C_{柱1})/h_1 + (D_{柱2} + C_{柱2})/h_2$$

同时，水平位移可根据式(5.22)

$$u = H \Big/ \left(12 \sum \frac{E_i K_i}{h_i^2}\right)$$

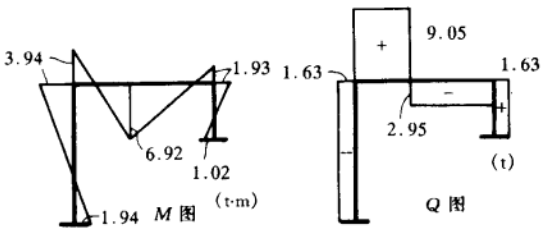


$$\Delta Q_1 = \frac{3.26+1.63}{3.6} + \frac{-0.98-0.49}{1.8} = 0.542\,(t)$$

$$\Delta Q_2 = \frac{0.56+0.28}{3.6} + \frac{-0.57-0.29}{1.8} = -0.244\,(t)$$

$$\Delta Q_3 = \frac{0.20+0.10}{3.6} + \frac{-0.17-0.09}{1.8} = -0.061\,(t)$$

$\Sigma\Delta Q$ 0.237 (t)



图解 5.11

其中的 H 取为 $\sum\Delta Q$。

$$u = \frac{0.237}{12\times 2.1\times 10^{6}\times\left(\frac{5.93}{3.6^{2}}+\frac{3.75}{1.8^{2}}\right)\times 10^{4}}$$

$$= 5.82\times 10^{-5}\,(\mathrm{m}) = 0.058\,(\mathrm{mm})$$

5.12 （图解 5.12）

刚度：

$$K_1 = 0.53\times 10^{3},\ K_2 = 2.84\times 10^{3},$$

$$K_3 = 1.30\times 10^{3}\,(\mathrm{cm}^3)$$

第一次的 FEM 是施加约束使柱产生 1/300 的杆件转角。这是由未知的水平力 P 产生的，这以后不必再对柱进行 FEM，只要放松传递力矩产生的不平衡便可保持 1/300。

$$M_{AB} = M_{BA} = 2EK_1(-3R)$$

$$= 2\times 2.1\times 10^{2}\times 0.53\times 10^{3}\times(-3/300)$$

$$= -2.23\times 10^{3}\,(\mathrm{t\cdot cm})$$

$$M_{CD} = M_{DC} = 2EK_3(-3R)$$

$$= 2\times 2.1\times 10^{2}\times 1.30\times 10^{3}\times(-3/300)$$

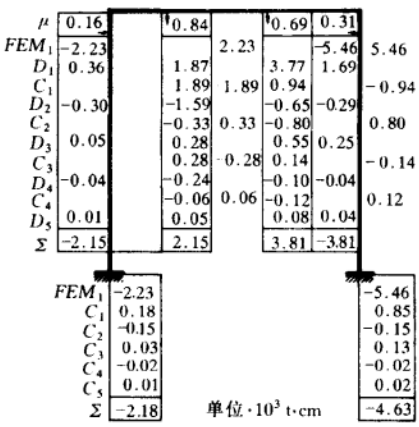
$$= -5.46\times 10^{3}\,(\mathrm{t\cdot cm})$$

水平力 P

$$P = -\frac{(-2.15-2.18-3.81-4.62)\times 10^{3}}{400}$$

$$= 31.9\,(\mathrm{t})$$

5.13 由于所有柱的刚度比相等，故柱的分担率为



图解 5.12

$$d = -\frac{1}{2(1+1)} = -0.25$$

梁的 FEM 为

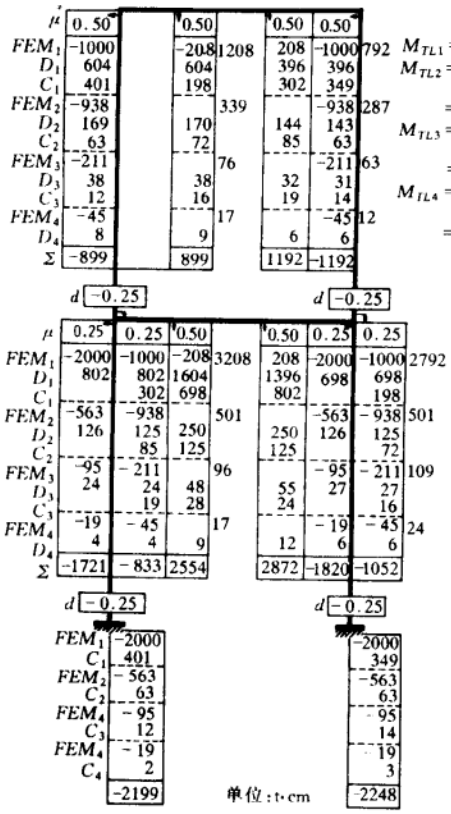
$$0.01\times(500)^{2}/12 = 208\,(\mathrm{t\cdot cm})$$

层的水平位移与水平力的关系由式(5.22)确定

$$u = H\Big/\left(12\sum\frac{E_iK_i}{h_i^{2}}\right)$$

由于层高是一定的，故有

$$u = \frac{(Hh)h}{12\sum E_iK_i} = \frac{M_{TL}h}{12\sum E_iK_i} = \frac{h\sum M_{Mi}}{12\sum E_iK_i}$$



$M_{TL1} = 10 \times 400 = 4\,000$ (t·cm)

$M_{TL2} = 604 + 401 + 802 + 302 + 396 + 349 + 698 + 198 = 3\,750$

$M_{TL3} = 169 + 63 + 125 + 85 + 143 + 63 + 125 + 72 = 845$

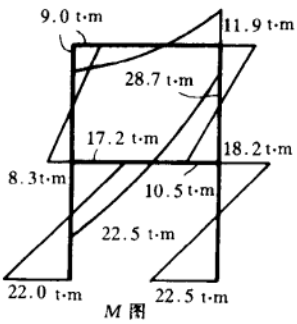
$M_{TL4} = 38 + 12 + 24 + 19 + 31 + 14 + 27 + 16 = 181$

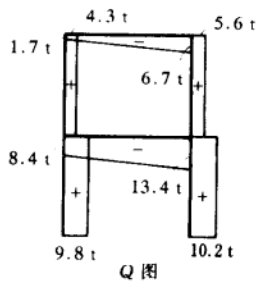
$M_{TL1} = (10 + 10) \times 400 = 8\,000$

$M_{TL2} = 802 + 401 + 698 + 349 = 2\,250$

$M_{TL3} = 126 + 63 + 126 + 63 = 378$

$M_{TL4} = 24 + 12 + 27 + 14 = 77$





图解 5.13(a)

图解 5.13(b)

所以 $$R = \frac{u}{h} = \frac{\sum M_{TL,}}{112 \sum E_i K_i}$$

注意到单位，将诸数值代入，可得 1 层、2 层的层间位移角 R_1、R_2 为

$$R_1 = \frac{\sum M_{TL,}}{12EK_0(1+1)} = \frac{8\,000 + 2\,250 + 378 + 77}{12 \times 2.1 \times 10^2 \times 5.0 \times 10^2 \times 2} \approx \frac{1.07 \times 10^4}{2.52 \times 10^6} \approx 4.2 \times 10^{-3}$$

$$R_2 = \frac{4\,000 + 3\,750 + 845 + 181}{2.52 \times 10^6} \approx 3.5 \times 10^{-3}$$

5.14 (1) 设图 5.33(b) 的柱脚为铰支承。

由于

$$M_{ij} = 2E_r K_r (2\theta_i - 3R_r) = 0$$

所以 $$\theta_i = \frac{3R_r}{2}$$

故有

$$M_{jr} = 2E_r K_r (\theta_i - 3R_r) = -3E_r K_r R_r \quad \text{(a)}$$

所以 $$Q_r = -\frac{M_{jr}}{h_r} = \frac{3E_r K_r R_r}{h_r} = \frac{3E_r K_r}{h_r^2}\delta \quad \text{(b)}$$

由于所有铰支承柱的剪力与外力 H 保持平衡，故有

$$H = \sum Q_r = \delta\left[\sum_{\text{层}} \frac{12E_r K_r}{h_r^2} + \sum_{\text{跨}} \frac{3E_r K_r}{h_r^2}\right] \quad \text{(c)}$$

因此，应施加在铰支承柱头上的 FEM 可将式(c)代入式(a)求得

$$M_r = -3E_r K_r \frac{\delta}{h_r} = d_r^* H \quad \text{(d)}$$



式中的 d_r^* 定义为铰支承柱的分担系数，

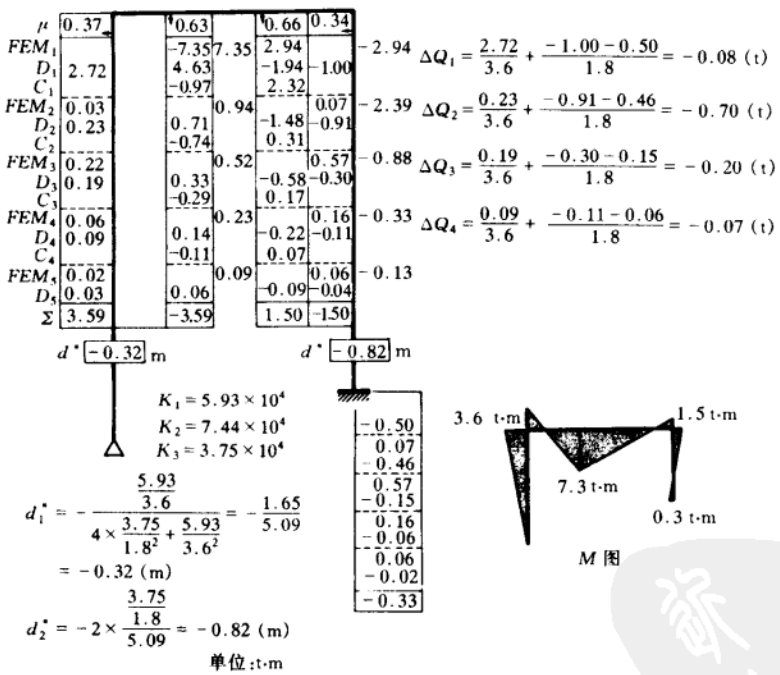
$$d_r^* = -\frac{E_rK_r/h_r}{4\sum_{Fix}\frac{E_iK_i}{h_i^2}+\sum_{Pin}\frac{E_iK_i}{h_i^2}} \tag{e}$$

当固定支承时显然应为 $2d_r^*$。当层高 h_r 及 E_r 相等时，可将式(d)、(e)重新定义为

$$M_r = d_r(Hh) = d_rM_{TL} \tag{f}$$

$$d_r = -\frac{K_r}{4\sum K_i+\sum K_i} \quad \text{(铰支承柱)} \tag{g}$$

(2) 利用式(e)的分担系数可求解层高不同的刚架(图解 5.14(a))，式(g)的分担系数适用于层高相同的刚架(图解 5.14(b))。利用有效刚度可计算柱脚铰接柱的分配率。



图解 5.14(a)

μ	0.50	0.50		0.57	0.43	
FEM_1	-1600		1600		-800	800
D_1	800	800		456	344	
C_1	432	228		400		
FEM_2	-1 136		476		-568	168
D_2	238	238		96	72	
C_2	15	48		119		
FEM_3	-189		126		-95	-24
D_3	63	63		-14	-10	
C_3	9	-7		32		
FEM_4	-45		43		-22	-10
D_4	21	22		-6	-4	
C_4	3	-3		11		
FEM_5	-14		14		-7	-4
D_5	7	7		-2	-2	
Σ	-1 396	1396		1 092	-1092	
	d -0.4				d -0.2	
μ	0.20	0.27	0.53	0.67	0.33	
FEM_1	-1600	-1600	3200		-3200	3200
D_1	640	864	1 696	2144	1056	
C_1		400	1072	848		
FEM_2	-445	-1136	109		-890	42
D_2	22	29	58	28	14	
C_2		119	14	29		
FEM_3	-9	-189	65		-17	-12
D_3	13	18	34	-8	-4	
C_3		32	-4	17		
FEM_4	-1	-45	18		-3	-14
D_4	4	5	9	-9	-5	
C_4		11	-5	5		
FEM_5	1	-14	7		2	-7
D_5	1	2	4	-5	-2	
Σ	-1374	-1504	2880	3 049	-3049	
	d -0.2				d -0.4	

$M_{TL1} = 10 \times 400 = 4\,000$ (t·cm)

$M_{TL2} = 800 + 432 + 864 + 400 + 344 = 2\,840$

$M_{TL3} = 238 + 15 + 29 + 119 + 72 = 473$

$M_{TL4} = 63 + 9 + 18 + 32 - 10 = 112$

$M_{TL5} = 21 + 3 + 5 + 11 - 4 = 36$

$M_{TL1} = 20 \times 400 = 8\,000$ (t·cm)

$M_{TL2} = 640 + 1\,056 + 528 = 2\,224$

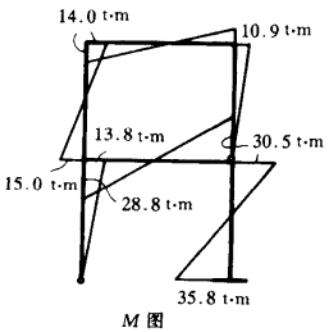
$M_{TL3} = 22 + 14 + 7 = 43$

$M_{TL4} = 13 - 4 - 2 = 7$

$M_{TL5} = 4 - 5 - 3 = -4$

FEM_1	-3200
C_1	528
FEM_2	-890
C_2	7
FEM_3	-17
C_3	-2
FEM_4	-3
C_4	-3
FEM_5	2
C_5	-1
Σ	-3579

单位：t·cm

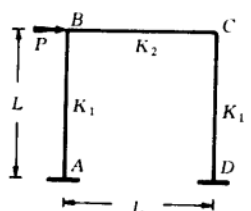


M 图

图解 5.14(b)

5.15

(1)



利用转角法求解。根据 $\theta_B = \theta_C$ 有

$$\begin{cases} M_{AB} = M_{DC} = 2E_1K_1(\theta_B - 3R) \\ M_{BA} = M_{CD} = 2E_1K_1(2\theta_B - 3R) \\ M_{BC} = 2E_1K_2(3\theta_B) \end{cases} \quad (a)$$

节点 B 的节点方程式及层方程式为

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{M_{BA} + M_{BA}}{L} + \frac{P}{2} = 0 \quad (c)$$

将式(a)代入式(b)、(c)，整理后有

$$\begin{bmatrix} 2K_1 + 3K_2 & -3K_1 \\ -3K_1 & 6K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2E_1\theta_B \\ 2E_1R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ PL/2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

对之求解可得

$$2E_1\theta_B = \frac{1}{K_1 + 6K_2} \cdot \frac{PL}{2}$$

$$2E_1R = \frac{2K_1 + 3K_2}{3K_1(K_1 + 6K_2)} \cdot \frac{PL}{2}$$

将数值

$K_1 = 868\ \text{cm}^3$，$K_2 = 1\,500\ \text{cm}^3$，$L = 600\ \text{cm}$

$P = 10 \times 10^3\ \text{kg}$，$E_1 = 2.1 \times 10^5\ \text{kg/cm}^2$

代入可求得 θ_B、R 为

$$\theta_B = 7.24 \times 10^{-4}, R = 17.33 \times 10^{-4}$$

因此，无斜撑时 C 点的水平位移为

$$u_C = RL = 1.04\ \text{cm}$$

(2) 根据式(b)，有

$$(4K_1 + 6K_2)\theta_B - 6K_1 R = 0 \qquad \text{(e)}$$

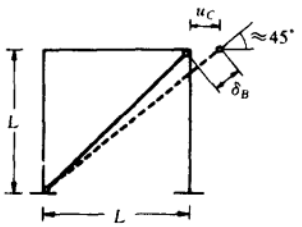
设斜撑的变形为 δ_B，则

$$\delta_B = u_C / \sqrt{2}$$

斜撑的轴力为

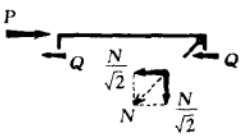
$$N = E_2 A \frac{\delta_B}{\sqrt{2}L} = \frac{E_2 A}{2L} u_C = \frac{E_2 AR}{2} \qquad \text{(f)}$$

将斜撑的轴力加到式(c)的层方程式中，有



$$P + \frac{2(M_{AB} + M_{BA})}{L} - \frac{N}{\sqrt{2}} = 0$$

所以 $12E_1K_1\theta_B - \left(24E_1K_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}E_2AL\right)R = -PL$ (g)



对式(e)、(g)求解可得

$$\theta_B = \frac{3K_1 PL}{12E_1K_1(K_1 + 6K_2) + (2K_1 + 3K_2)\alpha A}$$

$$R = \frac{(2K_1 + 3K_2)PL}{12E_1K_1(K_1 + 6K_2) + (2K_1 + 3K_2)\alpha A}$$

式中，$\alpha = \sqrt{2}E_2 L/4$。

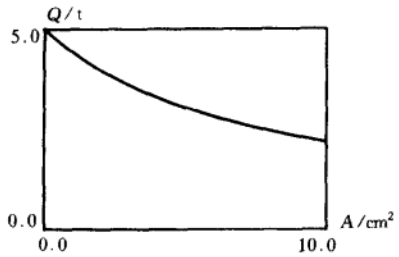
根据以上分析可得

$$Q = \frac{6EK_1}{L}(\theta_B - 2R)$$

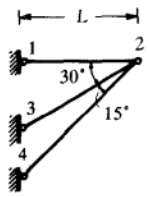
$$= P \Big/ \left(2 + \frac{2K_1 + 3K_2}{K_1 + 6K_2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{24} \frac{E_2 L}{E_1 K_1} A\right)$$

代入数据后可得

$$Q = \frac{10}{2 + 0.257A}\text{(t)}$$



5.16 如图所示将节点编上号。



在局部坐标系中计算各单元的刚度矩阵。

(杆件 1－2)

$$k_{11} = EA/L = \gamma$$

$$k_{21} = 0$$

$$k_{31} = -EA/L = -\gamma$$

$$k_{41} = 0, k_{22} = 0$$

$$k_{32} = 0, k_{42} = 0$$

$$k_{33} = EA/L = \gamma$$

$$k_{43} = 0, k_{44} = 0$$

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(杆件 3－2)

$$\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(杆件 4－2)

$$\boldsymbol{K}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据式(5.50),坐标变换矩阵的单元矩阵为 (杆件 1－2)

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{T}_1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{K}_1$$

然后将杆件刚度矩阵变换成总体坐标体系。

根据 5.3.2 节,组装总体刚度矩阵。将 i 点的水平位移、垂直位移表示为 u_i、v_i,i 点节点力的水平分量、垂直分量表示为 H_i、V_i 后,可得

$$\begin{bmatrix}H_1\\V_1\\H_2\\V_2\\H_3\\V_3\\H_4\\V_4\end{bmatrix}=\gamma\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & & 1+\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ & & & \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ & & & & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0\\ & & & & & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0\\ & & & & & & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ & & & & & & & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\\u_4\\v_4\end{bmatrix} \tag{1}$$

式中,$\gamma=EA/L$。

根据边界条件:$u_1=v_1=u_3=v_3=u_4=v_4=0$,对未知数 u_2、v_2 可建立以下的刚度方程式。

$$\begin{bmatrix}H_2\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ -\frac{3}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix} \tag{2}$$

对式(2)求解,可得

(杆件 3－2)

$$\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{T}_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8}\\ & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8}\\ & & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8}\\ & \text{Sym.} & & \frac{\sqrt{3}}{8}\end{bmatrix}$$

(杆件 4－2)

$$\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_3\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ & & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ & \text{Sym.} & & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix}0.933 & 1.192\\ 1.192 & 3.278\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_2\\V_2\end{bmatrix} \tag{3}$$

在式(3)中代入

$$H_2=0,V_2=-5t$$

$$\gamma=\frac{2.1\times10^7\times0.005}{4}=2.63\times10^4$$

可得

$$\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix}5.96\\16.39\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.27\\6.23\end{bmatrix}\times10^{-4}(\mathrm{m})$$

再将这些数值代入式(1),可求得节点 1、3、4 的节点力

$$H_1=-u_2\gamma=-5.96\mathrm{t},V_1=0$$

$$H_3=\left(-\frac{3}{8}\sqrt{3}u_2+\frac{3}{8}v_2\right)\gamma=2.28\mathrm{t}$$

$$V_3 = \left(\frac{3}{8}u_2 - \frac{\sqrt{3}}{8}v_2\right)\gamma = -1.31\text{t}$$

$$H_4 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}u_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}v_2\right)\gamma = 3.69\text{t}$$

$$V_4 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}u_2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}v_2\right)\gamma = -3.69\text{t}$$

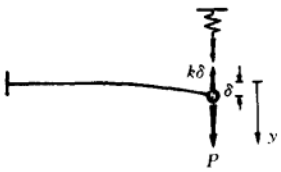
由该结果可得杆件的内力如下

杆件 1－2：5.96t(拉力)

杆件 3－2：2.62t(压力)

杆件 4－2：5.22t(压力)

5.17



设质点的位移为 δ，则有

$$\delta = \frac{(P - k\delta)l^3}{3EI}$$

所以

$$P = \left(\frac{3EI}{l^3} + k\right)\delta \tag{1}$$

因此，令式(1) $\delta = 1$ 时的 P 即为质点的刚度 K

$$K = \frac{3EI}{l^3} + k$$

质点的固有周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(W/g)}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{Wl^3}{g(3EI + kl^3)}}$$

设质点的运动方程(自由振动)不考虑阻尼。则有

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{2}$$

式中，$\omega^2 = \frac{Kg}{W} = \frac{g}{W}\left(\frac{3EI}{l^3} + k\right)$。

式(2)的一般解为

$$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{3}$$

系数 a、b 需根据初始条件 $y|_{t=0} = d$，$\dot{y}|_{t=0} = v$ 来确定，为

$$a = d, b = v/\omega$$

因此有

$$y = d\cos\omega t + \frac{v}{\omega}\sin\omega t$$

式中，$\omega = \sqrt{\frac{g}{W}\left(\frac{3EI}{l^3} + k\right)}$。

5.18 (1) 设 1 层、2 层柱的杆件转角为 R_1、R_2，转角法的基本公式为

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{FE} = M_{EF} = 2EK_1(-3R_1)$$

$$M_{BC} = M_{CB} = M_{ED} = M_{DE} = 2EK_2(-3R_2)$$

层方程式为

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= -(M_{AB} + M_{BA} + M_{FE} + M_{EF})/H \\ &= (24EK_1/H)R_1 \\ P_2 &= -(M_{BC} + M_{CB} + M_{ED} + M_{DE})/H \\ &= (24EK_2/H)R_2 \end{aligned} \tag{a}$$

将 R_1、R_2 用位移 u_1、u_2 来表示后，有

$$R_1 = u_1/H, R_2 = (u_2 - u_1)/H$$

将之代入式(a)有

$$P_1 + P_2 = (24EK_1/H^2)u_1$$

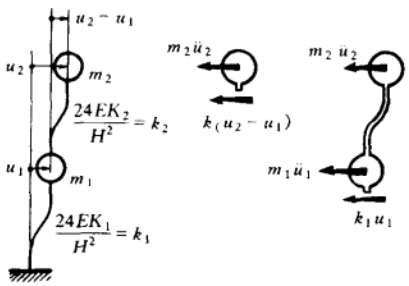
$$P_2 = (24EK_2/H^2)(u_2 - u_1)$$

求解 P_1、P_2，并整理成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{24E}{H^2}\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{b}$$

式中，$24EK_1/H^2$ 等表示了该层柱的弹簧常数(力/长度)。

(2) 可将刚架置换成如图所示的、由柱穿成的质点串模型来考虑无外力作用自由振动状态的力平衡。将质点切出考虑力的平衡(达朗贝尔原理)



$$\begin{cases} -m_2\ddot{u}_2 - k_2(u_2 - u_1) = 0 \\ -m_2\ddot{u}_2 - m_1\ddot{u}_1 - k_1u_1 = 0 \end{cases}$$

这里，$\ddot{u}_1$ 等表示质点的加速度。将式(2)减去式(1)并写成矩阵，有

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{c}$$

将式中的有关项写成

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

可得

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{d}$$

$\boldsymbol{K}$ 与用(1)求得的刚度矩阵相同。

(3) 设解为

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}U_1 e^{\omega t}\\ U_2 e^{\omega t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix}e^{\omega t}=\boldsymbol{U}e^{\omega t}$$

将之代入式(d),由于有

$$\ddot{\boldsymbol{u}}=\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}=(i\omega)^2\boldsymbol{U}e^{\omega t}$$

可得

$$[-\omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}]e^{\omega t}=\boldsymbol{0}$$

由于 $e^{\omega t}$ 是任意的,故有

$$[-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}]\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0} \qquad (e)$$

为使 $\boldsymbol{u}$ 有非零解,必须满足以下的固有方程

$$\det[-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}]=0 \qquad (f)$$

同时,由关系 $e^{\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$ 可见,根据式(f)求得的 ω 即为振动的固有圆频率。进而将 ω 代入式(e)中,求解 $\boldsymbol{u}$,可得固有振动的振幅(固有模态)。

(4) 刚度:

$$K_1=50^4/(12\times400)=1.302\times10^3$$
$$K_2=40^4/(12\times400)=0.533\times10^3 \quad (\mathrm{cm}^3)$$

层刚度:

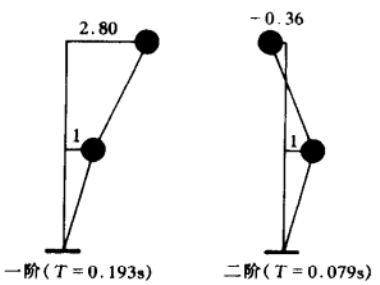
$$k_1=24EK_1/H^2=4.101\times10^4$$
$$k_2=24EK_2/H^2=1.533\times10^4 \quad (\mathrm{kgf/cm})$$

质量:

$$m_1=m_2=10\times10^3/980=10.20(\mathrm{kgf\cdot s^2/cm})$$

将之代入固有方程式(f)

$$\begin{aligned}&|-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}|\\&=\left|-\omega^2\begin{bmatrix}10.20&0\\0&10.20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4.101+1.679&-1.679\\-1.679&1.679\end{bmatrix}\times10^4\right|\\&=\begin{vmatrix}-10.20\omega^2+5.780\times10^4&-1.679\times10^4\\-1.679\times10^4&-10.20\omega^2+1.679\times10^4\end{vmatrix}\\&=1.040\times10^2\omega^4-7.608\times10^5\omega^2+6.886\times10^8\\&=0\end{aligned}$$



一阶($T=0.193$s) 二阶($T=0.079$s)

固有模态

对此求解,可得

$$\omega^2=\begin{cases}1\,058\\6\,257\end{cases}\quad\text{所以}\begin{cases}\omega_1=32.5(\mathrm{rad/s})\\\omega_2=79.1\end{cases}$$

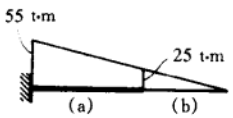
因此,固有周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\begin{cases}0.193\\0.079\end{cases}(\mathrm{s})$$

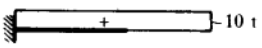
将 ω^2 代入式(e),可求得对应于 ω_1、ω_2 的 $\boldsymbol{U}$(设 $u_1=1$ 时)如下,它们即为固有模态。

$$\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2.80\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-0.36\end{bmatrix}$$

5.19



M 图



Q 图

设(a)、(b)杆件的最大弯曲应力为 σ_a、σ_b,则

$$\sigma_a=\frac{55}{Z_a}=55\frac{6}{b\cdot(2d)^2}=1719\ \mathrm{t/m^2}$$

$$\sigma_b=\frac{55}{Z_b}=25\frac{6}{b\cdot d^2}=3125\ \mathrm{t/m^2}$$

故杆件的最大弯曲应力发生在(b)杆件上,即

$$3125\ \mathrm{t/m^2}=312.5\ \mathrm{kg/cm^2}$$

设(a)、(b)杆件的最大剪应力为 τ_a、τ_b,则

$$\tau_a=\frac{15}{2bd}=62.5\ \mathrm{t/m^2}\qquad\tau_b=\frac{15}{bd}=125\ \mathrm{t/m^2}$$

故杆件的最大剪应力发生在(b)杆件上,即

$$125\ \mathrm{t/m^2}=12.5\ \mathrm{kg/cm^2}$$

5.20 当荷载作用在剪切中心时,纯弯曲屈曲沿弱轴方向发生。另一方面,当荷载作用在形心时,发生弯曲与扭转耦合的屈曲,故屈曲荷载比一般的纯弯曲屈曲荷载和纯扭转屈曲荷载小。因此,一般而言当荷载作用在形心时的屈曲荷载比荷载作用在剪切中心时的屈曲荷载小。

索　引

A

安全系数　49

B

薄壁杆件　195
边界条件　111
本构方程　88
标量　21
标准刚度　171
比例极限　47
边缘应力　130
不平衡力矩　171
变形　33

C

长细比　137
材料常数　88
材料力学　8
层间变形角　49
层方程式　161
长期容许荷载　139
传递力矩　169
超静定　96
超静定次数　97
超静定刚架　158
超静定梁　157
长细比　137

D

动能　7
堆积荷载　36
对称刚架　125,162
　反对称刚架　125
对称荷载　125,178
　反对称荷载　178
对称矩阵　110,161
达朗贝尔原理　16,166
短期容许荷载　139
动荷载　38
等价节点力　187

F

放松力矩　172
分量表示　61
反弯点　165
反力　33,39
非线性结构　50
分担系数　174
分担率　175
分配力矩　170
分配率　171
分布荷载　117
　均布荷载　117
分力　54
辅助单位　90
复合构件　42

G

高斯－约当法　210
割线弹性系数　49
惯性质量　12
惯性定律　12
惯性力　16
刚域　44
刚性楼板假定　44
刚度置换　174
刚度矩阵　109,161,212
　总体刚度矩阵　111,190
刚接　44,96
刚体　39
刚度　143
　标准刚度　171
　有效刚度　181
刚度比　165
　有效刚度比　174
国际单位　89
固定荷载　36
固定支承　39,73
杆端力矩　153
刚臂法　168,193
刚臂力矩法　153
固有圆频率　167
固有周期　167
固有频率　167
固有值　212
杆端条件　184
杆端力矩　153
杆端力　107
　杆端力与位移的关系　107
功　7,89
公式解法　99
杆件转角　153
杆件坐标　93

H

荷载　32,36
　固定荷载　36
　屈曲荷载　136
　堆积荷载　36
　对称荷载　125,162
　杆中荷载　154,184
　分布荷载　117

荷载项 155
荷载的模型化 36
合力 54
桁架 99
虎克定律 10

J
角速度 90
加速度 90
加速度计 17
基本单位 89
极坐标 27
局部坐标 78,187
极限状态设计法 50
井字梁 151
结构规划 32
结构设计 32
结构的模型化 41
结构单元 42
结构力学 7,32
极限强度设计法 50
集中荷载 113
静荷载 37
静定 95
静定刚架 123
静定结构 95
静定梁 112
节点 42
节点数 98
节点法 99
节点方程式 159
渐近法 175,181
剪力 72
剪应力 81,201
剪切弹性模量 88
剪切中心 201
剪力方程式 161
剪应力流 201
极限强度 50
简支梁 113
截面一次矩 128
截面回转半径 137
截面系数 130
截面二次半径 137
截面二次矩 129
截面力 35
铰支座 40
铰接 44
静不定 97
几何可变结构 97
极限强度 50
极限状态设计法 50
矩阵法 183

K
克莱姆法 99,215
开普勒定律 25
空间结构的判别公式 98
可动铰支座 41

L
力偶 119
力向量图 54,99
力 4,6
力的大小 19
力的平衡式 56,107
力的作用线 19
力的方向 19
连续条件 161
梁的基本公式 125
流程图 102
力矩 5,56
力矩的平衡式 56
力矩的符号 76
图乘法 139
力多边形 57

M
莫尔定理 139

N
能量 7,89
内力 35,68
内力图 75,115
内力的符号 75
逆矩阵 209
牛顿第一定律 12
牛顿第二定律 12
牛顿第三定律 12
扭转中心 201
扭矩 74

O
欧拉屈曲曲线 136

P
平衡式 39
外力的平衡式 56
力的平衡式 56,107
力矩的平衡式 56
平衡条件 73
平行四边形法则 21
平衡方程式 56
平面结构 96
平面结构的判别公式 97
平面假定 127

Q
曲率 129
屈服点 47
屈曲 136
屈曲应力 137
屈曲荷载 137
屈曲模态 137
切开法 118
倾覆力矩 148

R
容许应力 131
容许应力设计法 50
容许极限 40
容许弯曲应力 133
挠度 129
转角 132,153
挠度曲线 132
热应力 36

S

SM50 136
SS41 136
三铰结构 122
数值分析 23
速度 90
塑性区域 22
使用年限 32
受拉内力 76

T

图解法 99
弹性区域 22
弹性极限 47
弹性结构 102
弹性支承 44
弹性连接 44
弹性体 10
泰勒展开 82,206
弹簧系数 109
弹簧-质量体系 167
弹性模量 101

W

外力 32,36
 外力平衡公式 65
 外力矩 124
万有引力法则 12
位移 44
 位移与应变的关系 87
位移法 102
弯矩 73
弯矩图 73

X

悬臂梁 72
形心 128,195
线性结构 50
线性范围 88
线性物体 11
线材 193
小挠度假定 127
形变 35
向量 19,208
 向量的标量积 21
 向量的分量 61
 向量的向量积 21
 向量的和 62
 向量的表示 19

Y

压应力 80
永久变形 48
应力 46,78,88
 屈曲 136
 应力-应变曲线 48
应变能 39
应变 47,86
 正应变 86
右手系 59
雅可比法 212
有限单元法 42
有效刚度 181
有效刚度比 174

Z

组合单位 90
阻尼 44
最大应力 131
坐标系 59
 局部坐标系 187
 总体坐标系 187
坐标变换 78,188
 坐标变换矩阵 188
子结构 42
作用与反作用定理 12
作用面 81
轴力 74
自重 36,74
质量 12,90
支座 96
重量 91
正应力 88
正应变 88
纵向弹性系数 49
转角法 153
 转角法的基本公式 154
置换系数 174
中性轴 79,127
中性面 79,127
正交矩阵 188
转角法 152
组合构件 42

人名索引

爱因斯坦(德国-美国)(Einstein,Albert) 17
亚里斯多德(希腊)(Aristoteles) 9
阿基米德(希腊)(Archimeds) 6
维特鲁维亚(罗马)(Vitruvius) 1
尤特维修(匈牙利)(Eötvös,Roland von) 13
欧拉(瑞士)(Euler,Leonhard) 7
伽里略(意大利)(Galilei,Galileo) 9
卡尼(现代)(Kani,G) 153
克莱姆(意大利)(Cremona,Luigi) 99,215
克罗斯(现代)(Cross,Hardy) 153
库仑(法国)(Coulomb,Charles Auqustin) 16,128
开普勒(德国)(Kepler,Johannes) 24
吉拉德(法国)(Girard,P. S.) 128
季诺(希腊)(Zenon) 9
达朗贝尔(法国)(d'Alembert,JeanLe Rond) 16
德谟克里特(希腊)(Democristios) 9
纳维(法国)(Navier,Louis Marie Henri) 22,128
牛顿(英国)(Newton,Sir Isacc) 11,12
哈密顿(英国)(Hamilton,William Rowan) 16
巴伦(法国)(Parent) 128
毕达哥拉斯(希腊)(Pythagoras) 8
法拉第(英国)(Faraday,Michael) 17
虎克(英国)(Hooke,Robert) 10
伯努利(法国)(Bernoulli,Jacob) 128
希罗(希腊)(Heron) 9
麦克斯韦(英国)(Maxwell,James Clerk) 16
马义尔(法国)(Mariotté,Edme) 128
莫尔(德国)(Mohr,Otto) 139
杨(英国)(Yang,Thomas) 49
欧几里德(希腊)(Eucleides) 17
达·芬奇(意大利)(Leonardo da Vinci) 6
拉格朗日(法国)(Lagrange,Joseph Louis) 16

苑卮言》第四卷："又有点金成铁者，少陵有句云：'昨夜月同行'。陈元已则云：'勤勤有月与同归。'"
[近义]狗尾续貂
[反义]点铁成金

【点石成金】 diǎn shí chéng jīn
[释义]仙道能把石头点化成黄金。亦比喻修改文章可化腐朽为神奇。
[例证]宋·胡仔《苕溪渔隐丛话后集·孟浩然》："诗句以一字为工，自然颖异不凡，如灵丹一粒，点石成金也。"
[反义]点金成铁

【点铁成金】 diǎn tiě chéng jīn
[释义]原指古代方士能用丹药将铁(石)点化成金子，现多比喻修改文章、绘画或摘引词句略加改动即成佳作妙语。也比喻教师善于开导学生。
[例证]宋·释道原《景德传灯录》："还丹一粒，点铁成金；至理一言，点凡成圣。"宋·黄庭坚《答洪驹父书》："古之能为文章者，真能陶冶万物，虽取士人之陈言入于翰墨，如灵丹一粒，点铁成金也。"
[近义]点石成金
[反义]点金成铁

【点头哈腰】 diǎn tóu hā yāo
[释义]哈腰：弯腰。形容恭顺或过分客气的样子。现用以指虚伪的客气。
[例证]老舍《四世同堂》三四："比他穷的人，知道他是钱狠子，手脚又厉害，都只向他点头哈腰的敬而远之。"
[近义]打躬作揖
[反义]趾高气扬

【点头之交】 diǎn tóu zhī jiāo
[释义]交：交情。指遇到时，仅只点点头，打个招呼而已。形容没有深厚的交情。
[例证]周而复《上海的早晨》第一部："'你在厂里究竟认识了多少人？''少说也有百儿八十，点头之交。那就数不清了。'"

【电光石火】 diàn guāng shí huǒ
[释义]像闪电的光，燧石的火那样一闪即过。比喻事物很快消失。也形容速度极快。
[例证]宋·释道原《景德传灯录》第二十四卷："石火电光，已经尘劫。"清·洪昇《长生殿·冥追》："只他在翠红乡欢娱事过，粉香丛冤孽债多，一霎做电光石火。"
[近义]昙花一现
[反义]地久天长

【电闪雷鸣】 diàn shǎn léi míng
[释义]雷电交加，即将下大雨的样子。比喻声势很大。
[例证]古华《芙蓉镇》第三章："可是这时电闪雷鸣，狂风大作。马上就有倾盆大雨了。"

【阽危之域】 diàn wēi zhī yù
[释义]阽：临近。域：境地。临近危险的境地。
[例证]南朝·齐·王融《永明十一年策秀才文》："故能出人于阽危之域，跻俗于仁寿之地。"

【刁钻古怪】 diāo zuān gǔ guài
[释义]刁钻：狡诈。为人行事狡诈怪僻。形容机灵、乖巧。也形容问题、题目冷僻、怪异。
[例证]明·吴承恩《西游记》："又各挂着一个粉漆牌儿，一个写着'刁钻古怪'，一个写着'古怪刁钻'。"清·曹雪芹《红楼梦》第二十八回："你是个可人，你是个多情，你是个刁钻古怪鬼灵精。"清·曾朴《孽海花》第二十七回："万岁爷是个长厚人，决想不出这种刁钻古怪的主意，这件事一定是和陛下有仇的人唆使的。"
[近义]怪诞不经
[反义]朴素大方

【刁钻刻薄】 diāo zuān kè bó
[释义]刁钻：奸猾狡诈。形容人狡猾奸诈，待人苛刻薄情。

【貂裘换酒】 diāo qiú huàn jiǔ
[释义]貂裘：貂皮做的袍子，旧时富贵人的服装。用貂皮袍换酒。形容富贵者放

纵不羁。

[例证]唐·房玄龄等《晋书·阮孚传》："(孚)迁黄门侍郎散骑常侍。尝以金貂换酒，复为所司弹劾。"宋·张辑《贺新郎·乙未冬别冯可久》词："且趁霜天鲈鱼好，把貂裘换酒长安市。"清·秋瑾《对酒》诗："不惜千金买宝刀，貂裘换酒也堪豪。"

【雕虫小技】 diāo chóng xiǎo jì

[释义]雕：刻；虫：鸟虫书。我国古代的一种字体，西汉时学童所学的一门功课。雕刻虫书的小技巧。比喻微不足道的技能。也比喻要弄小手段、小聪明。

[例证]汉·扬雄《法言·吾子》："或问：'吾子少而好赋？'曰：'然，童子雕虫篆刻。'俄而曰：'壮夫不为也。'"唐·魏征《隋书·李德林传》："至如经同大体，是贾生、晁错之俦；雕虫小技，殆相如、子云之辈。"亦作"雕虫小艺"。梁·沈约《武帝集序》："笺记风动，表议飞云，雕虫小艺，无累大道。"

[近义]雕虫篆刻

[反义]雄才大略

【雕虫篆刻】 diāo chóng zhuàn kè

[释义]虫、刻：这里指虫书(亦称"鸟虫书")和刻符，是秦篆的两种字体，虫书大都铸刻在兵器和钟镈上，刻符刻于符节上。比喻微不足道的文字技巧。后常用作文人的自谦语。

[例证]汉·扬雄《法言·吾子》："或问：'吾子少而好赋？'曰：'然，童子雕虫篆刻。'俄而曰：'壮夫不为也。'"宋·苏轼《答谢民师书》："扬雄好艰深之辞以文浅易之说，若正言之，则人人知之矣，此正所谓雕虫篆刻者，其《太玄》、《法言》皆是类也。"

[近义]雕虫小技

【雕肝琢肾】 diāo gān zhuó shèn

[释义]比喻写作时绞尽脑汁，极力求工。

[例证]明·宋濂《〈杏庭摘稿〉序》："若秦汉以来，至于近代，其间雕肝琢肾以自驰骋于一世者，不为不多。"

[同义]雕肝镂肾

[近义]千锤百炼

[反义]信手拈来

【雕栏玉砌】 diāo lán yù qì

[释义]雕绘的栏杆，白玉般的石阶。泛指富丽堂皇的建筑(如宫殿)。

[例证]南唐·李煜《虞美人》："雕栏玉砌应犹在，只是朱颜改，问君能有几多愁，恰似一江春水向东流。"

【雕梁画栋】 diāo liáng huà dòng

[释义]梁：房梁，考究的房梁常雕刻有花纹图案。栋：支柱。指房屋有十分华丽的彩绘装饰。形容房屋富丽堂皇。

[例证]元·无名氏《看钱奴》："这的是雕梁画栋圣祠堂。"元·王子一《误入桃源》第二折："光闪闪贝阙珠宫，齐臻臻碧瓦朱甍，宽绰绰罗帏绣栊，郁巍巍雕梁画栋。"

[近义]琼楼玉宇

[反义]蓬门荜户

【雕龙画凤】 diāo lóng huà fèng

[释义]在建筑物或家具上刻绘龙凤，也指刻绘的龙凤。

[例证]胡世香《巧取陈家寨》："门上雕龙画凤，粉壁衬着红漆家具，分外耀眼。"《陕南民歌·十送》："高台十丈白玉柱，雕龙画凤放光彩。"

[近义]雕梁画栋

【雕文刻镂】 diāo wén kè lòu

[释义]在宫室、用具上雕刻镂花，加以美化。形容劳民伤财。后用以形容夸张不实的文章。

[例证]汉·班固《汉书·景帝纪》："诏曰：'雕文刻镂，伤农事者也；锦绣纂组，害女红者也。农事伤则饥之本也，女红害则寒之原也。'"

【雕玉双联】 diāo yù shuāng lián

[释义]精雕成双玉石装饰，相互关联。比喻文章对句工整精巧。

责。

[例证]南朝·梁·沈约《宋书·宗越传》:"帝凶暴无道,而越及谭金、童太壹并为之用,诛戮群公及何迈等,莫不尽心竭力,故帝凭其爪牙,无所忌惮。"

[近义]竭尽全力

[反义]敷衍塞责

【尽职尽责】 jìn zhí jìn zé

[释义]尽力做好本职工作,负起应负的责任。

[例证]张洁《爱,是不能忘记的》:"大约我们的细胞中主管'贼风入耳'这种遗传状的是一个特别尽职尽责的基因。"

[反义]玩忽职守

【尽忠报国】 jìn zhōng bào guó

[释义]用全部忠诚报效国家。

[例证]唐·李延寿《北史·颜之仪传》:"公等备受朝恩,当尽忠报国。"

[近义]精忠报国

[反义]祸国殃民

【进谗害贤】 jìn chán hài xián

[释义]谗:谗言,说别人的坏话。贤:贤才,指好人。说坏话,陷害好人。

【进寸退尺】 jìn cùn tuì chǐ

[释义]前进一寸,后退一尺。比喻所失多于所得。亦指进退。

[例证]《老子》第六十九章:"用兵有言:吾不敢为主而为客,不敢进寸而退尺。"唐·韩愈《上兵部李侍郎书》:"薄命不幸,动遭谗谤,进寸退尺,卒无所成。"明·卢象升《剿寇第二要策疏》:"两军对垒,旗鼓相当,进寸退尺之间,便分胜负。"

[近义]得不偿失

[反义]乞浆得酒

【进德修业】 jìn dé xiū yè

[释义]修业:推广、扩大功业。提高道德修养,扩大功业建树。多用作勉励进步之语。

[例证]《易·乾》:"君子进德修业。"晋·陶渊明《读史述九章·屈贾》:"进德修业,将以及时,如彼稷契,孰不愿之?"

[近义]修身养德

【进锐退速】 jìn ruì tuì sù

[释义]锐、速:快。进步快退步也快。比喻读书、习艺,学得快,不扎实,就会忘得更快。也比喻行动过急,实力不济,失败必然更快。

[例证]《孟子·尽心上》:"于不可已而已者,无所不已。于所厚者薄,无所不薄也。其进锐者,其退速。"宋·陆游《上殿札子·己酉四月十二日》:"若夫进锐退速,能动耳目之观听,而无至诚恻怛之心以终之。"清·陈澧《东塾读书记·孟子》:"进锐退速,助长也;所恶于智者,为其凿助长也。"

【进退两难】 jìn tuì liǎng nán

[释义]进和退都有困难。形容处于进不能进,退不能退的困境之中。一般都形容处境困难,或难于做决定。

[例证]元·郑德辉《周公摄政》第一折:"娘娘道不放微臣进宫闱,进退两难为。"

[近义]进退维谷

[反义]进退自如

【进退失据】 jìn tuì shī jù

[释义]据:依据,凭借。前进、后退都失去了依据。形容无处安身,亦指进退两难。

[例证]宋·陈亮《谢安比王导》:"温一心,以为有鸿鹄将至,故气不足以决之,而进退失据。"宋·司马光《资治通鉴·后唐·明宗天成二年》:"乱兵进退失据,遂溃。"

[近义]进退无门

[反义]左右逢源

【进退维谷】 jìn tuì wéi gǔ

[释义]维:语气助词。谷:比喻困难处境。进和退都处于困难的境地。用于无法摆脱困境时。

[例证]《诗经·大雅·桑柔》:"人亦有言,进退维谷。"

[近义]进退两难

[释义]屈:指屈原,战国时期浪漫主义诗人,擅长辞赋。班:指班固,汉朝文学家、历史学家,著《汉书》。像屈原辞赋那样艳丽,似班固《汉书》那样芳香。形容文章辞藻华美,兼有屈原辞赋、班固《汉书》的风格特点。

[例证]唐·杜牧《冬至日寄小姪阿宜》诗:"高摘屈宋艳,浓薰班马香。"

[近义]梦笔生花

[反义]佶屈聱牙

【屈一伸万】 qū yī shēn wàn

[释义]伸:展开,引申为凌驾。屈身于一人之下,凌驾于万人之上。

[例证]汉·赵晔《吴越春秋·王僚使公子光传》:"专诸者,堂邑人也。伍胥亡楚如吴时,遇之於途,专诸方与人斗。将就敌,其怒有万人之气,甚不可当。其妻一呼即还。子胥怪而问其状。……专诸曰:'子视吾之仪,宁类愚者也,何言之鄙夫。夫屈一人之下,必伸万人之上。'"

【屈指可数】 qū zhǐ kě shǔ

[释义]扳着手指就可以数清楚。

[例证]唐·韩愈《忆昨行和张十一》:"自期殒命在春序,屈指数日怜婴孩。"宋·欧阳修《集古录跋尾》:"今文儒之圣,其书屈指可数者,无三四人,非皆不能,盖忽不为尔。"

[近义]寥寥无几

[反义]恒河沙数

【屈尊敬贤】 qū zūn jìng xián

[释义]放下尊贵的身份,以恭敬的态度对待有才能和道德的人。

[例证]清·吴敬梓《儒林外史》第一回:"况且屈尊敬贤,将来志书上少不得称赞一篇。"

[近义]礼贤下士

[反义]傲贤慢士

【屈尊降贵】 qū zūn jiàng guì

[释义]谓有地位有身份的人自动放下架子,接近或就教于身份低的或普通人。

[例证]高尔品《少夫人达琳》:"不但一个国家的王储接见了她,还有一个国家的公主,居然屈尊降贵地陪着她整整游玩了一天,还夸她是东方美人。"

【祛病延年】 qū bìng yán nián

[释义]祛:除去。除去疾病,延长寿命。

[例证]明·吴承恩《西游记》第七十九回:"行者道:'陛下,从此色欲少贪,阴功多积,凡百事将长补短,自足以祛病延年。'"

[近义]延年益寿

【趋吉避凶】 qū jí bì xiōng

[释义]趋:奔向。吉:吉祥。趋向吉利美好,避开凶险灾难。

[例证]明·沈鲸《双珠记·母子分珠》:"趋吉避凶,儒者之事。"清·曹雪芹《红楼梦》第四回:"门子听了冷笑道:'老爷说的自是正理,但如今世上是行不去的!岂不闻古人说的"大丈夫相时而动",又说"趋吉避凶者为君子"'。"

[近义]趋利避害

[反义]飞蛾扑火

【趋名逐利】 qū míng zhú lì

[释义]趋:奔向。逐:追逐。比喻自私自利,只追求个人的名誉和利益。

[例证]唐·唐求《山居偶作》:"趋名逐利身,终日走风尘。"清·李百川《绿野仙踪》第五回:"我自都中起身,觉得人生世上,趋名逐利,毫无趣味。"

[反义]淡泊明志

【趋炎附势】 qū yán fù shì

[释义]趋:趋向,迎合。炎:热,比喻有权势的人。谓奔走权门,迎合、奉承、依附有权有势的人。

[例证]宋·陈善《扪虱新话》:"盖趋炎附势,自古然矣。"

[近义]攀龙附凤

[反义]安贫乐道

【趋之若鹜】 qū zhī ruò wù

[释义]趋:奔赴,快走。鹜:鸭子。像鸭子

[释义]兴利:开发利源。节用:节约费用。比喻开源节流的经济措施。

[例证]清·曹雪芹《红楼梦》第五十六回:"虽是兴利节用为纲,然也不可太过,要再省上二三百银子,失了大体统,也不象。"

[近义]克勤克俭

[反义]铺张浪费

【兴风作浪】 xīng fēng zuò làng

[释义]比喻无事生非,挑起事端,借机取利。

[例证]元·无名氏《锁魔镜》:"嘉州有冷热二河,河内有一健蛟,兴风作浪,损害人民。"清·曾朴《孽海花》第二十一回:"可笑那班小人,抓住人家一点差处,便想兴风作浪。"

[近义]兴妖作怪

[反义]息事宁人

【兴利除弊】 xīng lì chú bì

[释义]兴:兴办,创办。弊:弊端,害处。兴办有利的事业,革除有害的弊端。

[例证]《管子·君臣》下:"为民兴利除害,正民之德。"宋·王安石《答司马谏议书》:"举先王之政,以兴利除弊,不为生事;为天下理财,不为征利。"

[近义]革故鼎新

【兴灭继绝】 xīng miè jì jué

[释义]指复兴灭亡了的诸侯国,继续中断了的贵族世系。后泛指使已灭亡了的重新恢复起来。

[例证]《论语·尧曰》:"兴灭国,继绝世。"汉·司马迁《史记·三王世家》:"陛下奉承天统,明开圣绪,尊贤显功,兴灭继绝。"南朝·宋·范晔《后汉书·隗嚣传》:"兴灭继绝,封定万国。"

【兴师动众】 xīng shī dòng zhòng

[释义]兴、动:发动。本指为了战争动员百姓,大规模出兵。现多指动用大量人力。

[例证]《吴子·励士》:"夫发号布令,而人乐闻;兴师动众,而人乐战;交兵接刃,而人乐死。"宋·司马光《论西夏札子》:"先帝兴师动众,所费亿万,仅得数寨,今复无故弃之,此中国之耻也。"

[近义]劳师动众

[反义]按兵不动

【兴师问罪】 xīng shī wèn zuì

[释义]兴:发动。师:军队。宣布对方罪状,举兵讨伐。形容动员起来严厉斥责对方的过失。

[例证]宋·沈括《梦溪笔谈》第二十五卷:"元昊乃改元,制衣冠礼乐,下令国中,悉用蕃书,胡礼,自称大夏。朝廷兴师问罪。"明·宋濂等《元史·郭侃传》:"三年,侃上言:宋人羁留我使,宜兴师问罪。"

【兴旺发达】 xīng wàng fā dá

[释义]兴盛繁荣,发展壮大。形容事业欣欣向荣,蒸蒸日上。

[例证]章含之《章士钊上书》:"父亲终于送出了给毛主席的信。他在信中说自新中国成立之后,国家兴旺发达,全都仰仗共产党之英明领导。而毛、刘团结乃共产党领导核心坚强的保证。"

[近义]繁荣昌盛

【兴妖作怪】 xīng yāo zuò guài

[释义]指妖魔鬼怪闹事害人。比喻坏人捣鬼生事,滋扰社会秩序和百姓生活。

[例证]元·无名氏《碧桃花》:"你既然还有阳寿,阴曹地府不管,你却这等兴妖作怪。"明·冯梦龙《醒世恒言》第十三卷:"(府尹)大怒喝道,:'叵耐这厮,帝辇之下,辄敢大胆,兴妖作怪……'。"

[近义]兴风作浪

[反义]息事宁人

【兴云致雨】 xīng yún zhì yǔ

[释义]兴云:布下云彩。致雨:使下雨。兴起云雾,招致大雨。本指神话中龙的本领,后指有法术的人呼风唤雨。有时也形容乐曲诗文声势雄壮,有巨大的艺术感染力。

[例证]唐·皇甫氏《原化记·陆生》:"道

[例证]李锐《怀念田家英》:"解放后,他住在中南海,很看不起周围那些追名逐利之徒。"
[近义]追名夺利
[反义]云心日性

【追亡逐北】 zhuī wáng zhú běi
[释义]亡、北:指战败的敌人。形容追击败逃的敌人。
[例证]汉·贾谊《过秦论》上:"追亡逐北,伏尸百万,流血漂橹。"汉·司马迁《史记·田单列传》:"燕军扰乱奔走,齐人追亡逐北。"亦作"追奔逐北"。汉·李陵《答苏武书》:"然犹斩将搴旗,追奔逐北。灭迹扫尘,斩其枭师。"

【追源溯流】 zhuī yuán sù liú
[释义]溯:逆流而上,往上推求。谓逆着水流方向走,寻找水的源头。比喻探寻事物的根由源流。
[例证]柯灵《辛苦了,老水手!》:"左翼文化运动已经成为历史名词,但追源溯流,来踪去迹,却很分明。"
[近义]追本溯源
[反义]不求甚解

【椎髻布衣】 zhuī jì bù yī
[释义]椎髻:一撮之髻,形状如椎。布衣:布制的衣服。形容妇女朴素的衣饰。
[例证]南朝·宋·范晔《后汉书·梁鸿传》:"(孟光)乃更为椎髻,著布衣,操作而前。鸿大喜曰:'此真梁鸿妻也。'"
[近义]荆钗丰裙
[反义]花枝招展

【锥处囊中】 zhuī chǔ náng zhōng
[释义]处:放置。囊:口袋。锥子放在口袋里,锥尖一定会露出来。比喻有才智的人总是会显露头角,不会被长久埋没。
[例证]汉·司马迁《史记·平原君虞卿列传》:"夫贤士之处世也,譬若锥之处囊中,其末立见。"末:尖端。明·冯梦龙《东周列国志》第九十九回:"夫贤士处世,譬如锥之处于囊中,其颖立露。"陈三立《次韵再谈王义门》:"书传圮上此人去,锥处囊中相士谁?"
[近义]脱颖而出
[反义]剑鸣匣中

【锥刀之末】 zhuī dāo zhī mò
[释义]末:梢,尖儿。比喻小物或微小的利益。
[例证]春秋·鲁·左丘明《左传·昭公六年》:"锥刀之末,将尽争之。"亦作"锥刀之利"。南朝·宋·范晔《后汉书·舆服志》:"争锥刀之利,杀人如刈草。"刈:割。
[近义]蝇头小利
[反义]一本万利

【锥刀之用】 zhuī dāo zhī yòng
[释义]铁锥、小刀的功用。比喻功用很小。
[例证]三国·魏·曹植《求自试表》:"若使陛下出不世之诏,效臣锥刀之用。"
[近义]铅刀一割

【坠茵落溷】 zhuì yīn luò hùn
[释义]茵:褥子。溷:粪坑。有的落在褥子上,有的掉在粪坑里。比喻人的境遇、地位高下悬殊。
[例证]唐·姚思廉《梁书·范缜传》:"(竟陵王)子良问曰:'君不信因果,何得富贵,何得有贫贱?'缜曰:'人生譬如一树花,同发一枝,俱开一蒂,随风而堕。自有拂帘幌,坠于茵席之上,自有关篱墙,落于粪溷之侧。'"亦作"堕溷飘茵"。清·捧花生《画舫余谭》:"夫姬既薄命如花,后此之堕溷飘茵,诚难自主。"

【惴惴不安】 zhuì zhuì bù ān
[释义]惴惴:恐惧、担忧的样子。形容又发愁又害怕的样子。
[例证]《诗经·小雅·小宛》:"惴惴小心,如临于谷。"清·褚人获《隋唐演义》第七十二回:"中宗在均州闻之,心中惴惴不安,仰天而祝。"
[近义]忐忑不安
[反义]镇定自若

[辨析]“惴惴不安”重在形容忧惧、担心因而心神不定的神态；“忐忑不安”重在形容紧张、惊慌、担忧的心境。

【谆谆告诫】 zhūn zhūn gào jiè

[释义]谆谆：恳切、耐心的样子。形容恳切、耐心地劝告、教导。

[例证]宋·费袞《梁溪漫志·闲乐异事》：“命诸子子妇皆坐，置酒，谆谆告戒，家人见公无疾而遽若是，愕眙不知所答。”郭沫若《序〈美术考古一世纪〉》：“原作者谆谆告诫我们的是要我们注重整个的历史发展。”舒展《人·狼·狼人》：“鲁迅辞世前也谆谆告诫我们：毋忘旧恶。”

[近义]谆谆教悔

[反义]不教而诛

【谆谆教导】 zhūn zhūn jiào dǎo

[释义]谆谆：恳切、耐心的样子。形容恳切、耐心地教导。

[例证]《诗经·大雅·抑》：“诲尔谆谆，听我藐藐。”毛岸青、韶华《我们爱韶山的红杜鹃》：“父亲，您生前谆谆教导我们，不要那种脱离人民的虚无主义、个人主义，要到群众中去参加革命实践。”

[近义]谆谆善诱

[反义]不教而诛

【拙嘴笨舌】 zhuō zuǐ bèn shé

[释义]拙：笨，不灵活。嘴舌不灵便。形容人不善言谈。

[例证]清·随缘下士《林兰香》：“我亦并非处处都去留心，只是嘴拙舌钝，不敢轻易开口。”亦作“拙嘴笨腮”。刘厚明《常河叔叔》：“不行，不行，我拙嘴笨腮的。”

[近义]拙嘴笨腮

[反义]口齿伶俐

【捉班做势】 zhuō bān zuò shì

[释义]形容摆架子，装腔作势。

[例证]明·冯梦龙《醒世恒言》第三卷：“万一不肯时，妹子自会劝他，只是寻得主顾来，你却莫要捉班作势。”

[近义]装腔作势

[反义]平易近人

【捉刀代笔】 zhuō dāo dài bǐ

[释义]比喻代人出力或代写文章。

[例证]南朝·宋·刘义庆《世说新语·容止》：“魏武（曹操）将见匈奴使，自以形陋不足雄远国，使崔季珪代，帝自捉刀立床头。既毕，令间谍问曰：‘魏王何如？’匈奴使答曰：‘魏王雅望非常，然床头捉刀人，此乃英雄也。’”清·蒲松龄《聊斋志异·张鸿渐》：“诸生坐结党被收，又追捉刀人。”袁鹰《玉碎》：“社论、材料、文章、反应依次见报，各条战线先进人物、少数民族代表人士，纷纷出场，反正有笔杆子捉刀代笔。”

[反义]亲力亲为

【捉鸡骂狗】 zhuō jī mà gǒu

[释义]捉：捕，拿。捉住鸡，叱骂狗。比喻借此骂彼，影射攻击。参看“指鸡骂狗”、“指桑骂槐”。

[例证]明·冯梦龙《醒世恒言·陈多寿生死夫妻》：“把一团美意，看作不良之心，捉鸡骂狗，言三语四，影射的发作了一场。”

[近义]指桑骂槐

[反义]直言不讳

【捉襟见肘】 zhuō jīn xiàn zhǒu

[释义]襟：衣襟。肘：胳膊肘。整一整衣襟，就露出了胳膊肘。形容衣衫褴褛；也比喻顾此失彼，处境困难。

[例证]《庄子·让王》：“曾子居卫，十年不制衣，正冠而缨绝，捉衿而肘见。”（衿：通“襟”。）唐·李商隐《上尚书范阳公启》之二：“捉襟见肘，免类于前哲；制裘裹踵，无取于昔人。”

[近义]踵决肘见

[反义]绰有余裕

【捉贼捉赃】 zhuō zéi zhuō zāng

[释义]捉：拿获。赃：赃物。捉贼要发掘出赃物。比喻定人罪名要有真凭实据。

[例证]宋·胡大初《昼帘绪论·治狱》：

"谚曰：'捉贼须捉赃，捉奸须捉双。'此虽俚言，极为有道。"亦作"捉贼见赃"。明·洪楩《清平山堂话本·简贴和尚》："大尹叫将皇甫殿直来，当厅问道：'捉贼见赃，捉奸见双，又无佐证，如何断得他罪？'"

[近义]捉贼见脏

[反义]无凭无据

【卓尔不群】 zhuó ěr bù qún

[释义]卓尔：高高直立的样子。不群：同一般人不一样。高高直立，超出一般。形容优秀卓越，道德、学问等都超过常人。

[例证]汉·班固《汉书·景十三王传赞》："夫唯大雅，卓尔不群。"南朝·宋·范晔《后汉书·刘虞传论》："自帝室王公之胄，卓然不群者，或未闻焉。"

[近义]超群出众

[反义]庸庸碌碌

【卓荦不羁】 zhuó luò bù jī

[释义]卓荦：超绝。羁：束缚，限制。形容人俊逸多才而性格豪放，不受拘束。

[例证]宋·王安石《泰州海陵县主簿许君墓志铭》："君既与兄元相友爱称天下，而自少卓荦不羁，善辩说。"元·脱脱等《金史·文艺传·赵可》："博学多才，卓荦不羁。"

[近义]风流倜傥

【卓荦英姿】 zhuó luò yīng zī

[释义]卓荦：卓绝出众。形容英俊威武，超群出众。

[例证]清·吴敬梓《儒林外史》第二十九回："有分教，风流高会，江南又见奇踪；卓荦英姿，海内都传雅韵。"

[近义]出类拔萃

[反义]碌碌无能

【卓有成效】 zhuó yǒu chéng xiào

[释义]卓：卓越，突出。形容成绩或效果显著突出。

[例证]明·王守仁《申行十家牌法》："若巡访劝谕著有成效者，县官备礼亲造其庐，重加奖励。"

[近义]行之有效

[反义]徒劳无功

【斫雕为朴】 zhuó diāo wéi pǔ

[释义]斫：砍，削。雕：雕饰，过分的修饰。削去过分的雕饰，使之质朴无华。比喻抑制奢华，提倡俭朴。

[例证]汉·司马迁《史记·酷吏列传》："汉兴，破觚而为圜，斫雕而为朴。"南朝梁·任昉《为梁武帝禁奢令》："孤忝荷大宠，务在澄清，思所以仰述皇朝大帛之旨，俯厉微躬鹿裘之义，解而更张，斫雕为朴，自非可以奉粢盛。修黼冕习礼乐之容，缮甲兵之备，此外众费一皆禁绝。"

[近义]返璞归真

[反义]华而不实

【斫轮老手】 zhuó lún lǎo shǒu

[释义]斫轮：砍削木头以制造车轮。比喻技艺纯熟或经验丰富的人。

[例证]《庄子·天道》："轮扁曰：'臣也，以臣事观之，斫轮，徐则甘而不固，疾则苦而不入。不徐不疾，得之于手而应于心，口不能言，有数存乎其间。臣不能以喻臣之子，臣之子亦不能受之于臣，是以行年七十而老斫轮。'"蔡东藩、许廑父《民国通俗演义》第六十七回："段本是个武夫，阮又是个帝制派中的健将，两人不来多嘴，全凭那斫轮老手徐世昌，及倚马长才王式通，悉心研究。"

[近义]行家里手

[反义]黄口小儿

【着手成春】 zhuó shǒu chéng chūn

[释义]着手：开始做，动手。一动手便有了春意。比喻诗人、画家才思高雅清新，今多比喻医生医术高明，一下手就把垂危的病人挽救过来。

[例证]姚雪垠《李自成》："有的失血过多，命在垂危，只要子明一到，就会着手回春。"

[General Information]
书名=建筑结构力学
作者=（日）和泉正哲著；薛松涛，陈熔译
页数=254
出版社=西安市：西安交通大学出版社
出版日期=2003
SS号=11206541
DX号=000003056329
URL=http://book.szdnet.org.cn/bookDetail.jsp?dxNumber=000003056329&d=720683B0F570F4D062DDBF4DA036F618